

KINEMATIKA TOČKE

4. 10. 21 Kinematika točke

Literatura

Gibanje, položaj točke, kartezične koordinate x, y, z , baza $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Krajevni vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$, tir, trajektorija, pot.

Vektor hitrosti $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, brzina $v = |\vec{v}|$.

Geometrijski pomen vektorja hitrosti.

Pospešek, $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$, geometrijski pomen.

Pojem pospeševanja, zaviranja:

i) točka pospešuje, če je $\frac{dv}{dt} > 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} > 0$;

ii) točka zavira, če je $\frac{dv}{dt} < 0 \iff \vec{v} \cdot \vec{a} < 0$.

Primer: linearno zaviranje.

Osnovne kinematične količine.

Premočrtno gibanje : tir leži na premici.

Enakomerno gibanje, enakomerno pospešeno gibanje.

Harmonični oscilator

$x = A \cos(\omega t - \delta)$; amplituda, frekvenca, fazni zamik, perioda gibanja. Analiza harmoničnega gibanja; točka trenutnega mirovanja, točka obrata, pospeševanje, zaviranje.

Ravninsko gibanje.

Polarni koordinatni sistem (PKS).

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}.$$

11. 10. 21 Literatura

Zapis vektorja hitrosti in pospeška v PKS; radialni pospešek, obodni pospešek.

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + (\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Primer: kroženje (=tir leži na krožnici); enakomerno kroženje, neenakomerno.

Kroženje je enakomerno natanko tedaj, ko vektor pospeška kaže proti središču kroženja.

Kotna hitrost, kotni pospešek.

Primer: Ladja pluje s konstantno brzino tako, da njena smer gibanja oklepa s svetilnikom konstantni kot. Določi tir in trajektorijo gibanja.

Kinematika gibanja po krivulji

Ločna dolžina, aproksimacija z dolžino poligonske črte, dolžina loka na krivulji $\vec{r} = \vec{r}(t)$ od točke $A = \vec{r}(t_a)$ do točke $B = \vec{r}(t_b)$ je

$$s(A, B) = \int_{t_a}^{t_b} |\dot{\vec{r}}| dt.$$

Trditev Brzina je absolutna vrednost odvoda poti po času; $v = |\dot{s}|$.

Vektor $\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$ je enotski vektor v smeri tangente na tir.

Vektor hitrosti je tangenti vektor na tir gibanja in velja $\vec{v} = \dot{s}\vec{e}_t$.

Ukrivljenost, $\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \kappa\vec{e}_n$; krivinski polmer $1/R = \kappa = \left| \frac{d\vec{e}_t}{ds} \right|$, vektorju $\vec{e}_n$ pravimo normalni vektor oziroma normala na krivuljo.

Dekompozicija vektorja pospeška na tangencialni in normalni pospešek

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n.$$

Ukrivljenost je enaka nič natanko tedaj, ko je krivulja premica.

Gibanje je premočrtno natanko tedaj, ko sta vektorja hitrosti in pospeška vzporedna.

Ukrivljenost ravninske krivulje je konstantna natanko tedaj, ko krivulja krožnica.

Binormala $\vec{e}_b = \vec{e}_t \times \vec{e}_n$

Torzijska ukrivljenost $d\vec{e}_b/ds = -\tau\vec{e}_n$.

Krivulja je ravninska natanko takrat, ko je njena torzijska ukrivljenost enaka nič.

Velja: krivulja je do togega pomika natanko določena z normalno in torzijsko ukrivljenostjo.

Primer : gibanje po vijačnici.

18. 10. 21 Literatura

Krivočrtne koordinate $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$; difeomorfizem med kartezičnimi koordinatami $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in krivočrtnimi $\mathbf{q}$.

Krivočrtni bazni vektorji $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$.

Trditve Vektorji $\vec{g}_i$, $i = 1, 2, 3$ so linearno neodvisni.

Primer:

a) cilindrične koordinate;

b) krogelne koordinate.

Hitrost v krivočrtnih koordinatah $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \dot{q}_i \vec{g}_i$.

Pospešek v krivočrtnih koordinatah.

DINAMIKA TOČKE

Newtonovi zakoni; inercialni koordinatni sistem(IKS), Newtonova enačba, zakon o akciji in reakciji.

Vprašanje obstoja IKS.

Gibanje je natanko določeno z začetnim pogojem in Newtonovo enačbo.

Delo, kinetična energija.

Izrek Delo, ki ga opravi sila na materialno točko pri gibanju vzdolž tira, je enako razliki kinetične energije.

25. 10. 20 Literatura

Potencialna sila, konzervativna sila.

Izrek(Izrek o energiji) Naj bo $\vec{F}$ konzervativna sila. Potem je vsota kinetične in potencialne energije konstanta gibanja.

Osnovni primeri sil

a) Gibanje v polju konstantne sile $\vec{F} = \vec{F}_0 = m\vec{g}$, potencial $U = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r}$.

b) Gravitacijska sila $\vec{F} = -\frac{\kappa m_1 m_2}{r^2} \vec{r}/r$, potencial $U = -\kappa m_1 m_2 / r$.

c) Električna sila.

d) Sila vzmeti, Hookova sila $\vec{F} = -k \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} (|\vec{r} - \vec{r}_0| - l)$, potencial $U = \frac{1}{2}k (|\vec{r} - \vec{r}_0| - l)^2$.

e) Sila upora, sila trenja.

e) Sila upora, sila trenja.

PREMOČRTNO GIBANJE

Pišimo $\vec{F} = f\vec{i}$ in naj bo $f = f(x)$ zvezna funkcija. Potem je $T + V = E$ je integral gibanja.

$$t = t_0 + \text{sgn} \dot{x} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}.$$

Kvalitativna analiza gibanja, omejeno, neomejeno gibanje; točka trenutnega mirovanja, periodično gibanje, perioda.

Perioda periodičnega gibanja

$$T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}.$$

2. 11. 20 Literatura

Kvalitativna analiza gibanja, stabilna, nestabilna ravnovesna lega.

Lema

$$\int_a^b \frac{du}{\sqrt{(b-u)(u-a)}} = \pi.$$

Primer: perioda harmoničnega oscilatorja.

Izokronično gibanje.

Harmonična aproksimacija $T \approx 2\pi\sqrt{m/U''(x_0)}$.

8. 11. 21 Literatura

Libracijsko gibanje; substitucija $V(x) = (b-x)(x-a)\chi(x)$, $x = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \theta$;

$$T = \sqrt{2m} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\chi(\phi)}} d\phi \approx \pi \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\chi(a)}} + \frac{1}{\sqrt{\chi(b)}} \right)$$

perioda.

Primer: *Duffingov oscilator* $U = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\beta x^4$, $\alpha\beta < 0$.

Fazna ravnina, fazni portret.

Trditev Za omejeno premočrtno gibanje velja $\frac{dA}{dE} = \frac{1}{m}T$. Tu je A ploščina pripadajočega lika v fazni ravnini, T pa perioda gibanja.

Primer: harmonično gibanje.

Premočrtno gibanje pod vplivom nekonzervativne sile.

GIBANJE PO KRIVULJI

Tangencialni pospešek, normalni pospešek; $\vec{a} = \ddot{s}\vec{e}_t + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_n$.

Newtonova enačba $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{S}$, sila vezi $\vec{S}$.

Gibanje po negladki krivulji.

Gibanje po gladki krivulji

Redukcija na premočrtno gibanje.

Sila vezi, idealna vez ($\vec{S} \cdot \vec{e}_t = 0$).

Trditev Delo idealne sile vezi je enako nič. Za gibanje po gladki krivulji pod vplivom konzervativne sile velja energijska enačba

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 + U(s) = E_0.$$

Gibanje po gladki krivulji pod vplivom konzervativne sile je integrabilno.

15. 11. 21 **Trditev** Delo idealne sile vezi je enako nič.

Primer: gibanje po gladki vijačnici.

Primer: matematično nihalo.

a) aproksimacija majhnega nihanja;

b) harmonična aproksimacija;

c) libracijska $T = 2\pi\sqrt{l/g}\sqrt{\theta_0/\sin\theta_0}$.

d) ocena nihajnega časa matematičnega nihala:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \leq T \leq \frac{1}{\cos\frac{\theta_0}{2}} 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Harmonična aproksimacija gibanja po ravninski krivulji pod vplivom sile teže v smeri osi,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g\kappa}}.$$

GIBANJE V POLJU CENTRALNE SILE

Definicija Sila $\vec{F}$ je centralna, če obstaja točka O (center sile) tako, da velja $\vec{F} = f(|P - O|)(P - O)/|P - O|$.

Če je funkcija $f = f(r)$ zvezna, je centralna sila konzervativna.

Trditev Pri gibanju v polju centralnih sil je vrtilna količina $\vec{l}(O, P)$ konstantna.

Izrek Gibanje v polju centralnih sil je ravninsko. Točka se giblje po ravnini, ki vsebuje center sil in ima normalo v smeri vektorja vrtilne količine.

Ploščinska hitrost, zveza $l = |\vec{l}| = mC_0$, kjer je C_0 dvojna ploščinska hitrost.

Izrek Gibanje v polju centralne sile ima dve konstanti gibanja, energijo in ploščinsko hitrost.

Keplerjevi zakoni; zgodovinski oris, Tycho Brahe (1546-1601), Johannes Kepler (1571-1630), Isaac Newton (1643-1727);

22. 11. 21 **Trditev** Če je ploščinska hitrost konstantna, je obodni pospešek enak nič.

Binetova formula

$$a_r = -C_0^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right).$$

Trditev Če je tir elipsa, je radialni pospešek obratno sorazmeren kvadratu oddaljenosti do centra sil.

Zapis elipse v polarnem KS $r = p/(1 + \epsilon \cos \varphi)$. Zveza med ϵ in p ter polosema elipse

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

Trditev Kvocient C_0^2/p je konstanten za vse planete v osončju,

Redukcija na premočrtno gibanje koordinate r , efektivni potencial $U(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(r)$.

Določitev trajektorije s kvadraturami.

Določitev tira $\theta = \theta(r)$

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{sgn} \dot{r} \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E_0 - U(r)}}.$$

Primer: gibanje v polju gravitacijske sile $V(r) = -\frac{\gamma}{r}$. Graf efektivnega potenciala.

Tir gibanja v polju gravitacijske sile.

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0 + \pi/2)}, \quad p = \frac{l^2}{m\gamma}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\gamma^2}},$$

kjer je θ_0 polarni kot do lokalnega minimuma efektivnega potenciala.

Primer: kvalitativna analiza gibanja v polju centralne sile pod vplivom potenciala $V = \alpha r^p$.

28. 11. 21 Kvalitativna analiza gibanja v polju centralne sile, apsidni radij, pericenter, apocenter, apsidni kot $\Delta\theta$.

Trditev Tir je simetričen glede na apsidni radij.

Trditev Tir se dotika apsidnih krožnic.

Pogoj zaprtosti tira $W = \Delta\theta/\pi \in \mathbb{Q}$.

Velja: če omejeni tir ni zaprt je gosta množica v kolobarju med apsidnima radijema.

Bertrandov izrek: edina potenciala za katera je vsak omejen tir v okolici krožnega tira zaprt sta gravitacijski in Hookov.

RELATIVNO GIBANJE

Absolutni, relativni koordinatni sistem; pisava $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\zeta}$; $\vec{\zeta} = \zeta_i \vec{e}_i$, $\vec{e}_i = Q \vec{e}_i$.

Izrek $\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i$. Vektorju $\vec{\omega}$ pravimo vektor kotne hitrosti.

Relativna hitrost $\vec{v}_{\text{rel}} = \dot{\vec{\zeta}}$, povezava med absolutno in relativno hitrostjo

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\zeta} + \vec{v}_{\text{rel}}.$$

Trditev Vektor kotne hitrosti rotacije $R(\vec{e}, \varphi)$ okrog stalne osi je $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\varphi} \vec{e}$.

Velja Vektor kotne hitrosti rotacije $R(\vec{e}, \varphi)$ je

$$\vec{\omega}' = \dot{\varphi} \vec{e} + \sin \varphi \dot{\vec{e}} + (1 - \cos \varphi) \vec{e} \times \dot{\vec{e}}.$$

6. 12. 21 Relativni pospešek $\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{\vec{\zeta}}$, povezava med absolutnim in relativnim pospeškom

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}.$$

Sistemi, Coriolisov, relativni pospešek.

Newtonova enačba v absolutnem koordinatnem sistemu $m\vec{a} = \vec{F}$, v relativnem koordinatnem sistemu

$$m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta}) - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}.$$

Translacijska sila, centrifugalna sila, inercialna sila rotacije, Coriolisova sila.

Primer: dvigalo, vrtenje.

Foucaultovo nihalo.

13. 12. 21 SISTEM MATERIALNIH TOČK

Masno središče.

Notranje sile, zunanje sile, masno središče $\vec{r}_*$, enačba gibanja masnega središča. $m\vec{a}_* = \vec{F}$.

Primer: poševni met.

Vrtilna količina $\vec{L} = \vec{L}(O) = \sum_{i=1}^N \vec{l}(O, P_i)$

Navor zunanjih sil $\vec{N} = \vec{N}(O) = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \times \vec{F}_i$.

Izrek o vrtilni količini

$$\frac{d}{dt} \vec{L}(O) = \vec{N}(O) + \vec{N}_{\text{n}}(O).$$

Centralnost notranjih sil

$$\vec{F}_{ji}(P_i, P_j) = F_{ji}(|P_i - P_j|) \frac{P_i - P_j}{|P_i - P_j|}, P_i - P_j = \overrightarrow{P_j P_i}$$

Izreko o vrtilni količini. Rezultanta navora centralnih notranjih sil je enaka nič.

$$\frac{d}{dt} \vec{L}(O) = \vec{N}(O).$$

Odvisnost vrtilne količine od izbire pola; $\vec{L}(P_0) = \vec{L}(O) + P_0 O \times m\vec{v}_*$.

Pisava: $\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{\zeta}_i$.

Vrtilna količina gibanja okoli P_0 ; $\vec{\mathcal{L}} = \vec{\mathcal{L}}(P_0) = \sum_i \vec{\zeta}_i \times m_i \dot{\vec{\zeta}}_i$.

Izrek o vrtilni količini $\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{L}} = \vec{N}(P_0) - (\vec{r}_* - \vec{r}_0) \times m \vec{v}_0$.

Posebni primeri : $P_0 = P_*$

$$\frac{d}{dt} \vec{\mathcal{L}} = \vec{N}(P_0).$$

Kinetična energija, dekompozicija kinetične energije.

Energijska enačba

$$T + U + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n U_{ji} = E_0.$$

14. 12. 20 Zaprti sistem

Trki

TOGO TELO

Togo gibanje, pojem togega sistema.

Opis gibanja togega telesa, togo gibanje je natanko določeno z gibanjem treh nekolinearnih točk.

Posplošitev sistema materialnih točk na kontinuum mnogo točk, pojem togega telesa, masa.

Opis togega gibanja kot relativno gibanje telesnega KS.

Tenzorski produkt: tenzorski produkt dveh vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je linearna preslikava $\vec{a} \otimes \vec{b}$ definirana z $\vec{r} \mapsto (\vec{a} \otimes \vec{b})\vec{r} = (\vec{b} \cdot \vec{r})\vec{a}$.

Trditev Velja

$$a) \ (\underline{\underline{A}})\vec{a} \otimes \vec{b} = (\underline{\underline{A}}\vec{a}) \otimes \vec{b};$$

$$b) \ (\vec{a} \otimes \vec{b})\underline{\underline{A}} = \vec{a} \otimes (\underline{\underline{A}}^T \vec{b});$$

$$c) \ (\vec{a} \otimes \vec{b})^T = \vec{b} \otimes \vec{a}.$$

Vrtilna količina $\vec{\mathcal{L}}(P_*) = \underline{\underline{J}}(P_*)\vec{\omega}$.

Vztrajnostni tenzor telesa $\mathcal{B}$:

$$\underline{\underline{J}}(P_*) = \int_{\mathcal{B}} \left(|\vec{\zeta}|^2 \underline{\underline{I}} - (\vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta}) \right) dm, \quad \vec{\zeta} = P - P_*.$$

27. 12. 21 Vztrajnostni tenzor je simetričen.

Vztrajnostni moment $J_e = \vec{e} \cdot \underline{\underline{J}}\vec{e}$ okoli osi $\vec{e}$, deviacijski momenti $\underline{\underline{D}}$.

Trditev Tenzor $\underline{\underline{J}}$ je nenegativen. Če telo ni tanka palica, je pozitivno definiten.

Glavne vrednosti, glavne smeri.

Primer: vztrajnostni tenzor pokončnega valja.

Izrek (Steiner) $\underline{\underline{J}}(P_0) = \underline{\underline{J}}(P_*) + m|P_0 - P_*|^2 \underline{\underline{I}} - m(P_0 - P_*) \otimes (P_0 - P_*)$.

Trditev Prehod na novo bazo; $\vec{e}'_i = \alpha_{ij}\vec{e}_j \implies J'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}J_{kl}$.

Trditev Normala na ravnino zrcalne simetrije skozi P_0 je glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\underline{\underline{J}}(P_0)$.

Trditev Če ima telo dve ravnini zrcalne simetrije skozi P_0 , je presek ravnin simetrij glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\underline{\underline{J}}(P_0)$.

Kinetična energija togega telesa $T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}}(P_*)\vec{\omega}$.

Dinamika togega telesa

Aksiomi gibanja togega telesa: dinamične enačbe togega telesa so:

i) enačba gibanja masnega središča: $m\ddot{P}_* = \vec{F}$;

ii) princip o vrtilni količini: $\frac{d\vec{\mathcal{L}}(P_*)}{dt} = \vec{N}(P_*)$;

iii) $\vec{N}(O) = \vec{N}(P_0) + (P_0 - O) \times \vec{F}$.

Ekvipolentnost sistema sil.

Dva ekvipolentna sistema sil imata enak dinamični efekt na togo telo.

3. 1. 22 Polznost sile.

Invarianta sistema sil.

Ravnovesni sistem, dvojica, sistem sil s skupnim prijemališčim, redukcija na skupno prijemališče.

Volumenske sile.

Trditev Homogena sila je ekvipolentna svoji rezultanti s prijemališčem v masnem središču.

Eulerjeva dinamična enačba $\underline{J}_* \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{J}_* \vec{\omega} = \vec{N}_*$.

Eulerjeva dinamična enačba. Naj bo P_0 fiksna točka ali masno središče. Potem je

$$\underline{J}(P_0) \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \underline{J}(P_0) \vec{\omega} = \vec{N}(P_0).$$

Komponentni zapis Eulerjeve dinamične enačbe.

a) v lastnem koordinatnem sistemu vztrajnostnega tenzorja;

$$N_1 = J_1 \omega_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3),$$

$$N_2 = J_2 \omega_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1),$$

$$N_3 = J_3 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2).$$

b) v koordinatnem sistemu s koordinatno osjo v smeri stalne osi rotacije.

$$N_1 = J_{13} \ddot{\varphi} - J_{23} \dot{\varphi}^2$$

$$N_2 = J_{23} \ddot{\varphi} + J_{13} \dot{\varphi}^2$$

$$N_3 = J_{33} \ddot{\varphi}$$

Izrek o delu: $\frac{dT}{dt} = \vec{v}' \cdot \vec{F}' + \vec{\omega}' \cdot \vec{N}'(P'_*)$.

Potencial volumenske sile

$$U = \int_B u \, dm.$$

10. 1. 22 **Trditev** (Izrek o energiji) Če je sistem sil na togo telo konzervativen, je vsota kinetične in potencialne energije konstanta gibanja.

Primer:

a) kotaljenje valja po strmini;

b) kotaljenje z drsenjem.

Primer : vrtenje telesa okrog stalne osi, določitev sil v ležajih.

Prosta vrtavka

Posebni primer: enakomerna rotacija okrog glavnih osi.

Binetov elipsoid, presek Binetovega elipsoida s sfero; gibanje vektorja vrtilne količine po Binetovem elipsoidu.

Stabilnost enakomerne rotacije.

Osnosimetrična prosta vrtavka: analitična obravnava; precesija vektorja kotne hitrosti okoli osi.