

Krivulje rasti

Matematični model [1]:

- Splošni model rasti:

$$\frac{dN}{dt} = a N$$

N ... velikost naraščajoče količine

t ... čas

a ... koeficient rasti

- Standardna oblika:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a(t) \tag{1}$$

Eksponentna rast

- Koeficient rasti $a(t) = a_0 = \text{konst.}$
- Rešitev enačbe (1):

$$N = N_0 e^{a_0 t}$$

Rast po krivulji normalne porazdelitve

- Linearno padajoči koef. rasti $a(t) = a_0 (1 - m t)$, $m = \text{konst.}$
- Rešitev enačbe (1):

$$N = N_0 e^{a_0(t - \frac{m}{2}t^2)}$$

Sinusni koeficient rasti

- Koeficient rasti $a(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t)$
- Rešitev enačbe (1):

$$N = N_0 e^{a_0 t - \frac{a_1}{\omega}(\cos \omega t - 1)}$$

Logistična rast

- Koefficient rasti: $a(N) = a_0 - b N = a_0 \left(1 - \frac{N}{N_*}\right)$

$b = \text{konst.}$... koefficient goščanja, $b = a_0/N_*$

$N_* = \text{konst.}$... ravnotežna vrednost ob koncu rasti

- Model rasti:

$$\frac{dN}{dt} = a_0 N \left(1 - \frac{N}{N_*}\right) \quad (2)$$

- Rešitev enačbe (2) (Verhulstova enačba):

$$N = \frac{N_*}{1 + (N_*/N_0 - 1)e^{-a_0 t}}$$

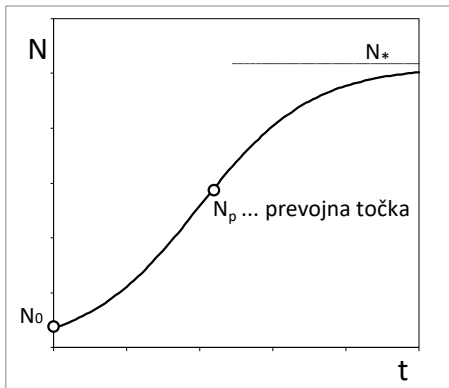
$N_0 = \text{konst.}$... začetna vrednost

Prevojna točka:

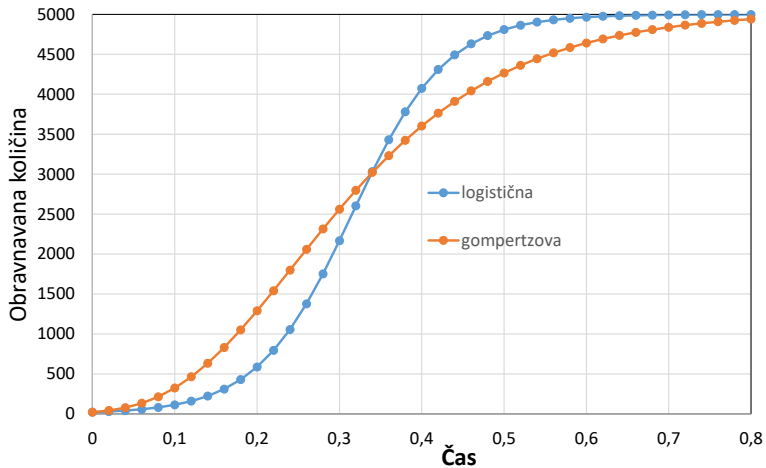
$$N_p = \frac{N_*}{2}$$

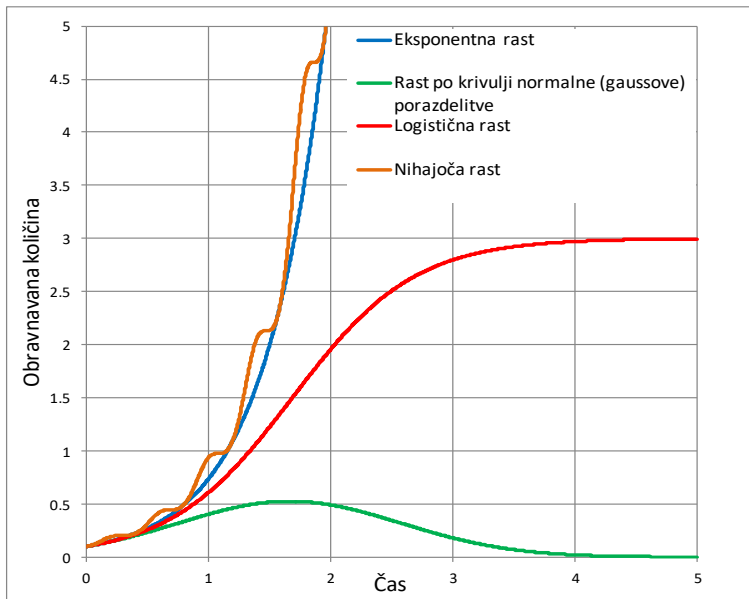
$$t_p = \frac{1}{a_0} \ln\left(\frac{N_*}{N_0} - 1\right)$$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_p = \frac{1}{4} a_0 N_*$$



Primerjava dveh "S" krivulj rasti





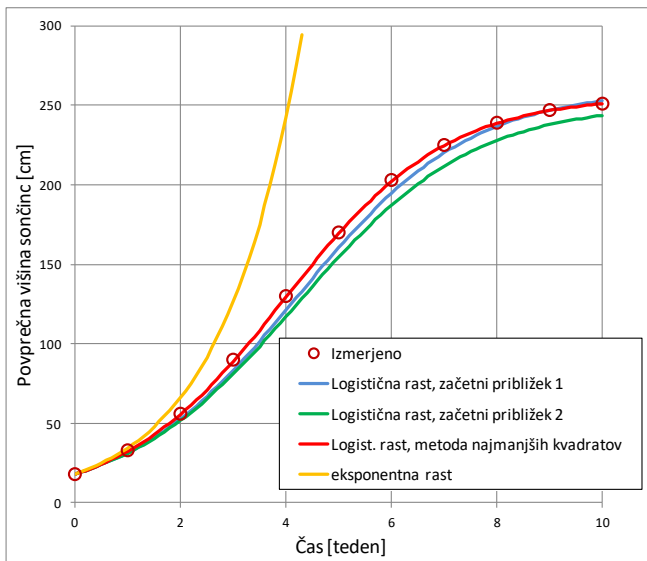
Primer 1: rast sončnic

- Povprečna višina stebel sončnic:

Čas [teden]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Višina [cm]	18	33	56	90	130	170	203	225	239	247	251

- Določite model rasti sončnic!
- Rešitev: logistični model:

$$h = \frac{h_*}{1 + (h_*/h_0 - 1)e^{-a_0 t}} = \frac{256}{1 + 13e^{-0,65t}}$$



• Glej tudi: soncnice.nb

Logistična rast in onesnaženje

- Koefficient rasti:

$$a(N) = a_0 - b N - c \int_0^t N dt \quad (3)$$

$c = \text{konst.}$... koefficient onesnaženja

$P = \int_0^t N dt$... onesnaženje, se ne zmanjšuje, $\frac{dP}{dt} = N$

- V nadaljevanju predpostavimo $b = 0$, t.j. ni učinka goščanja, oz. upočasnjevanja rasti zaradi omejitve virov.

- Integralsko-diferencialna enačba:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a_0 - c \int_0^t N dt \quad (4)$$

- Rešitev integralsko-diferencialne enačbe (4) v odvisnosti od količine onesnaženja P :

$$N = N_0 + a_0 P - \frac{cP^2}{2}$$

- ter v odvisnosti od časa t :

$$P = \frac{a_0}{c} \left[1 + \frac{a_*}{a_0} \tanh \left(\frac{a_* t}{2} - \phi \right) \right] \quad (5)$$

$$N = \frac{a_*^2}{2c} \left[\cosh \left(\frac{a_* t}{2} - \phi \right) \right]^{-2} \quad (6)$$

kjer sta:

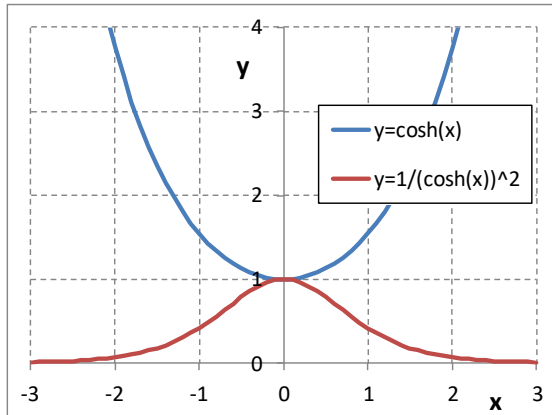
$$a_* = \sqrt{a_0^2 + 2cN_0} \quad , \quad \phi = \operatorname{artanh} \frac{a_0}{a_*} \quad (7)$$

• Ker ima $\cosh^{-2}(x)$ maksimum pri $x=0$, bo populacija dosegla največjo velikost

$$N_{maks} = \frac{a_*^2}{2c}$$

pri času

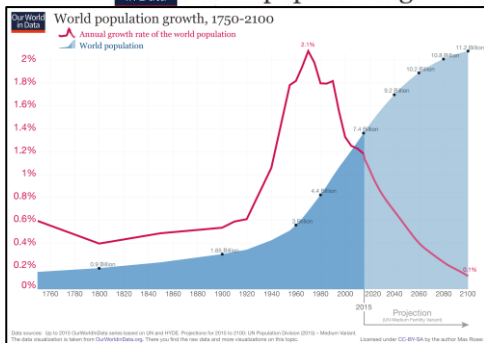
$$t_m = \frac{2\phi}{a_*}$$



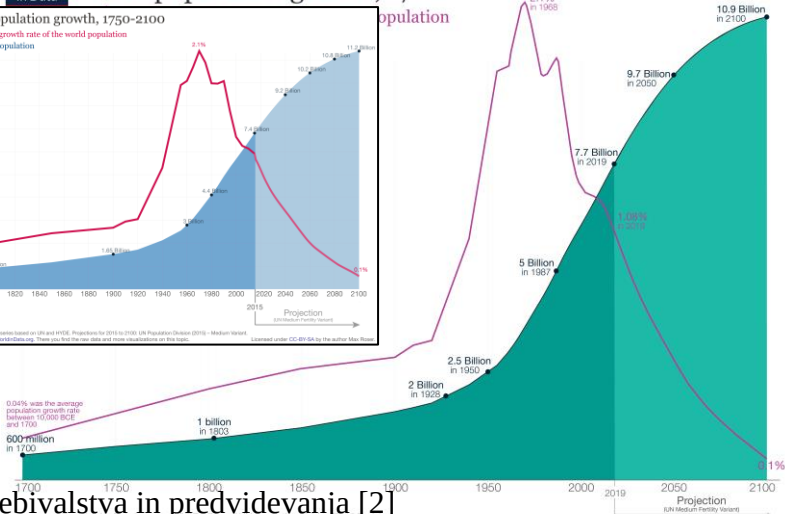
Primer 2: rast človeške populacije

Our World
in Data

World population growth, 1700-2100



population



Rast prebivalstva in predvidevanja [2]

Data sources: Our World in Data based on UN and HYDE. Projections for 2019 to 2100: UN Population Division (2019) - Medium Variant. This is a visualization from OurWorldinData.org, where you find data and research on how the world is changing.

Licensed under CC-BY by the author Max Roser.

- Podatki

Čas [leto]	1950	1960	1970	1980	1987	1999	2019
Št. ljudi [10^9]	2,500	3,050	3,721	4,476	5,000	6,000	7,700

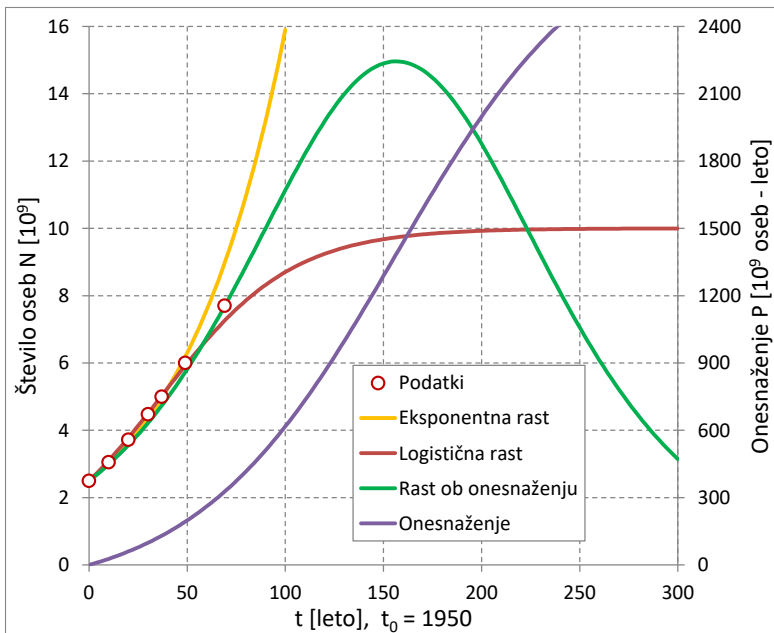
- Neodvisni parametri v enačbah (5), (6) in (7):

$$N_0 = 2,500 \cdot 10^9 \quad (\text{populacija leta 1950})$$

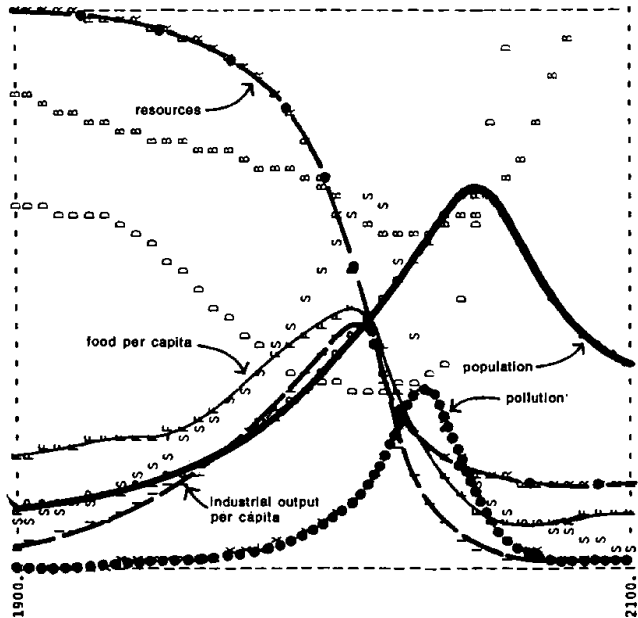
$$a_0 = 0,018/\text{leto} \quad (\text{rast okrog leta 1950})$$

$$c = 1,3 \cdot 10^{-14} \text{ oseb/leto}^2 \quad (\text{določen tako, da ustreza populaciji leta 2019})$$

- V modelu upoštevano samo onesnaženje!



- Napoved iz [3]:
"Standard world
model"



O številu rekordnih let

- Opazujemo pojave, ki v dovolj dolgem časovnem obdobju nastopajo neodvisno (npr. letno povprečje padavin).

- Verjetnost, da bo prav dotično leto postavljen nov rekord:

Leto	1	2	3	4	...	n
Verjetnost	1	1/2	1/3	1/4	...	1/n

- V daljšem časovnem obdobju lahko pričakujemo s let, v katerih je bil dosežen rekord. Pri tem je s vsota n členov harmoničnega zaporedja:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

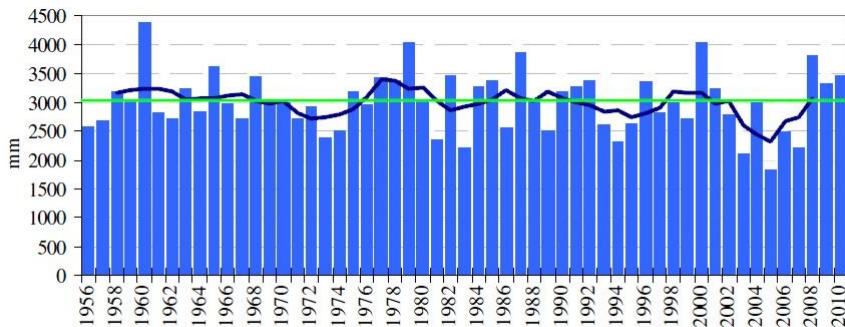
Primer 3: podatki meteorološke postaje Žaga [4]

- Opazovanja od 1956 do 2010, t.j. 54 let.

$$s = \sum_{i=1}^{54} \frac{1}{i} = 4,57$$

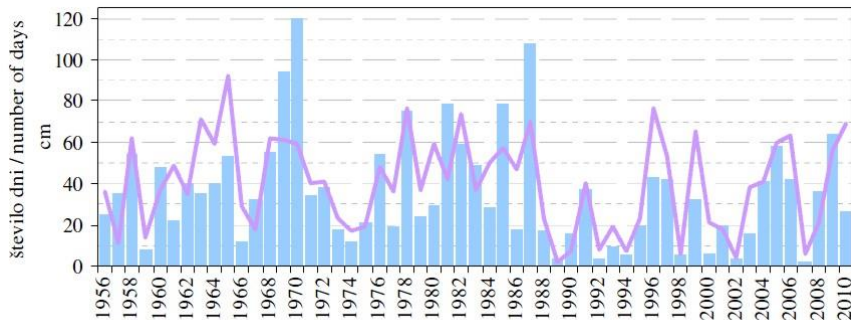
- Pričakovati je 4 do 5 rekordnih let.

- Rekordna leta so: 1956, 1957, 1958, 1960.
- Če ne bi bilo izjemnega leta 1960, bi bila rekordna leta: 1956, 1957, 1958, 1965 in 1979.



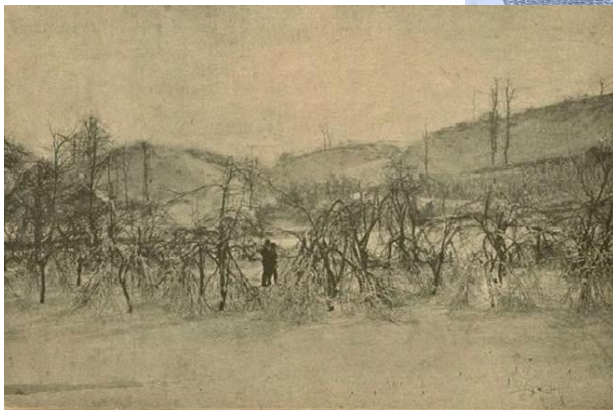
Slika 3. Letna višina padavin³ (stolpci) in petletno drseče povprečje (krivulja) v obdobju 1956–2010 ter referenčno povprečje (za 1961–1990, zelena črta)

- Rekordna leta so: 1956, 1957, 1958, 1969, 1970.



Slika 9. Letno število dni s snežno odejo⁶ (krivulja) in najvišja snežna odeja (stolpci) v obdobju 1956–2010

- Potemtakem tudi žled leta 2014 ni tako huda izjema:



Žled na sadnem drevju na Pivki.
(Dne 15. grudnia 1899.)

Fot. R. Seber.

Literatura

- [1] Banks B. Robert: *Ledene gore, padajoče domine in druge prigode iz uporabne matematike*, 2. del, iz zbirke Knjižnica sigma, DMFA-založništvo Ljubljana, 2005.
- [2] <https://ourworldindata.org/world-population-growth/> (oktober 2020).
- [3] Meadows D.H. et al: *The Limits to Growth, A Report for the Club of Rome's Project on the Predicament of Mankind*, Universe Books, New York, 1972.
- [4] Nadbath Mateja: *Meteorološka postaja Žaga, Naše okolje, Bilten Agencije RS za okolje*, julij 2011.