VIII.4 Greenova funkcija in Poisson–Jensenova reprezentacijska formula.

Naj bo $D \subset\subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ omejena domena z gladkim robom ∂D. V tem razdelku nas zanima rešitev nehomogenega Dirichletovega problema:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D, \\ u = g & \text{na } \partial D \end{cases}$$

Pri tem je f dana funkcija na D in g dana fn. na ∂D.

Označimo z $\Gamma(z, \zeta)$ $(z, \zeta \in \mathbb{C})$ funkcijo

$$\Gamma(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \log |z - \zeta| \quad (\text{naravni } \log) \quad (4.1)$$

Ker je funkcija $\log|z|$ harmonična na $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, je funkcija Γ harmonična v obeh spremenljivkah na $(z, \zeta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{z = \zeta\}$ (izven diagonale).

<u>IZREK</u> (Greenova reprezentacijska formula). Za vsako funkcijo $u \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$ velja

$$u(z) = \int_{\zeta \in \partial D} \Big(u(\zeta) \cdot \partial_n \Gamma(z, \zeta) - (\partial_n u)(\zeta) \cdot \Gamma(z, \zeta) \Big) \cdot ds(\zeta) + \iint_D \Gamma(z, \zeta) \cdot (\Delta u)(\zeta) \cdot dx \cdot dy \quad (4.2)$$

Naj bo $f \in \mathcal{C}(\bar{D})$.

<u>Opomba</u>: Funkcija

$$\Gamma(f)(z) = \iint_{\zeta \in D} \log|z-\zeta| \cdot f(\zeta) \cdot \frac{dx\,dy}{2\pi} \quad ; \ z \in D \tag{4.3}$$

se imenuje <u>Newtonov potencial</u> funkcije f.

<u>POSLEDICA</u>. Za vsako funkcijo $u \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{C})$ s kompaktnim nosilcem velja:

$$u(z) = \iint_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{1}{2\pi} \cdot \log|z-\zeta| \cdot (\Delta u)(\zeta) \cdot dx\,dy \tag{4.4}$$

Formula (4.4) pomeni:

$$\Delta_\zeta \log|z-\zeta| = 2\pi \cdot \delta_z \tag{4.5}$$

v smislu distribucij, kjer je δ_z <u>Diracova distribuc.</u> v točki z: $\quad \delta_z(f) = f(z), \ \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$.

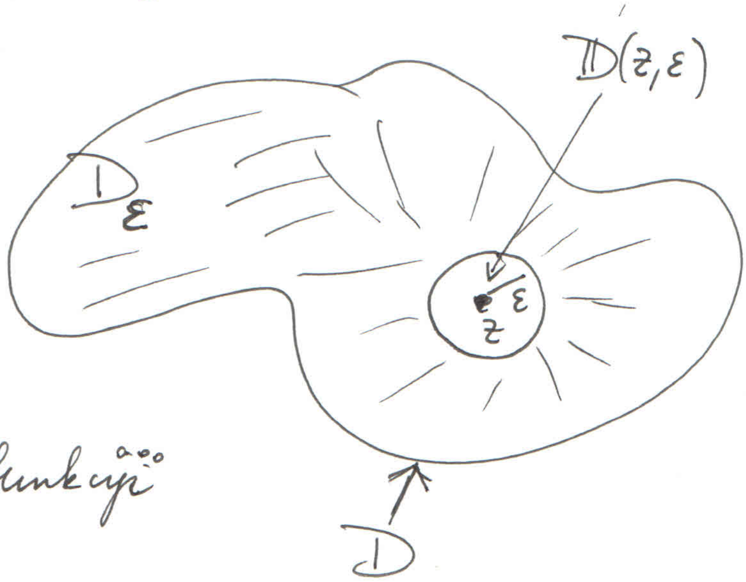
Torej je $\frac{1}{2\pi} \log|z-\zeta|$ <u>fundamentalna rešitev</u> <u>za Laplaceov operator</u>: $\Delta_\zeta\left(\frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta|\right) = \delta_z$.

<u>Dokaz posledice</u>: Izberemo dovolj velik krog $D \subset \mathbb{C}$, ki vsebuje $\operatorname{supp} u$. Tedaj je $u = 0$ in $\partial_n u = 0$ na ∂D; torej (4.4) sledi iz (4.2).

Dokaz izreka. Fiksiramo točko $z \in D$. Izberemo majhen $\varepsilon > 0$, tako da je $\overline{\mathbb{D}(z,\varepsilon)} \subset D$ in definiramo domeno

$$D_\varepsilon = \{\zeta \in D : |z-\zeta| > \varepsilon\} = D \setminus \overline{\mathbb{D}(z,\varepsilon)}.$$

D_ε dobimo tako, da iz D izrežemo zaprt krog $\overline{\mathbb{D}(z,\varepsilon)}$.



Uporabimo Greenovo formulo (VII. 5.4) za funkciji $u(\zeta)$ in $v(\zeta) = \Gamma(z,\zeta) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \log|z-\zeta|$$

na domeni D_ε (pri fiksnem z) in upoštevajmo $\partial D_\varepsilon = \partial D \cup \{\zeta : |\zeta - z| = \varepsilon\}$. Dobimo:

$$\int_{\partial D} (\partial_n u \cdot \Gamma - u \cdot \partial_n \Gamma)\, ds + \int_{|\zeta - z| = \varepsilon} (u \cdot \partial_n \Gamma - \partial_n u \cdot \Gamma)\, ds =$$

$$= \iint_{D_\varepsilon} (\Gamma \cdot \Delta u - u \cdot \Delta \Gamma) \cdot dx\, dy$$

$$(4.6) \qquad = \iint_{D_\varepsilon} \Gamma \cdot \Delta u \cdot dx\, dy \qquad (\text{ker je } \Delta\Gamma = 0).$$

Pri integralu po $\{|\zeta - z| = \varepsilon\} = \partial\mathbb{D}(z,\varepsilon)$ vzamemo odvod v smeri zunanje normale, zato smo spremenili predznak.

Izračunajmo limito pri $\varepsilon \downarrow 0$. V ta namen si najprej oglejmo singularnost funkcije $\Gamma(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\log|z-\zeta|$ pri $\zeta = z$ (pri fiksnem z). Uvedemo polarni zapis spremenljivke ζ: $\zeta = z + re^{i\theta} = x+iy$.

Tedaj je $\Gamma(z,\zeta) = \Gamma(z, z+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\log r$.

Ker je $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ in je $r\log r \xrightarrow{r\downarrow 0} 0$, sledi, da je $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ (lokalno integrabilna) in

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \Gamma\cdot\Delta u\cdot dx\,dy = \iint_D \Gamma\cdot\Delta u\cdot dx\cdot dy .$$

Ker je na krožnici $|z-\zeta| = \varepsilon$ normalni odvod enak odvodu po r (v polarnih koordinatah $\zeta = z + re^{i\theta}$), je

$$\partial_n \Gamma(z, z+re^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2\pi}\log r\right) = \frac{1}{2\pi r} .$$

Zato je
$$\int_{|\zeta-z|=\varepsilon} u\cdot\partial_n\Gamma\cdot ds = \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} u(z)\cdot\frac{1}{2\pi\varepsilon}\,ds$$
$$+ \int_{|\zeta-z|=\varepsilon} \left(u(z+\varepsilon e^{i\theta}) - u(z)\right)\cdot\frac{1}{2\pi\varepsilon}\cdot ds$$

Prvi člen na desni je enak $u(z)$, drugi člen na desni pa konvergira v 0 pri $\varepsilon \downarrow 0$

Preostane še člen $\int\limits_{|\zeta-z|=\varepsilon} -\partial_n u \cdot \Gamma \cdot ds$.

Očitno je odvod $|\partial_n u|$ omejen. Na krožnici $|\zeta - z| = r = \varepsilon$ je $\Gamma = \frac{1}{2\pi} \log\varepsilon$; dolžina krožnice je $2\pi\varepsilon$. Produkt teh števil je $\leq M \cdot \frac{1}{2\pi}\log\varepsilon \cdot 2\pi\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0$.

V limiti pri $\varepsilon \downarrow 0$ dobimo iz (4.6) formulo

$$\int\limits_{\partial D} \left(\partial_n u \cdot \Gamma - u \cdot \partial_n \Gamma\right) \cdot ds + u(z) = \iint\limits_D \Gamma \cdot \Delta u \cdot dx\,dy$$

kar je ekvivalentno formuli (4.2).

Iz dokaza izreka na str. VIII.16 vidimo, da velja ista formula za vsako funkcijo Γ oblike

$$\Gamma(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\log|z - \zeta| + h_z(\zeta), \qquad (4.7)$$

kjer je $h_z \in C^1(\overline{D}) \cap \mathrm{Harm}(D)$. Dodatek take funkcije namreč ne spremeni limite v integralu $\int\limits_{|z-\zeta|=\varepsilon}$ pri $\varepsilon \downarrow 0$; prav tako se ne spremeni $\iint\limits_D \Gamma \cdot \Delta u \cdot dx\,dy$, ker je $\Delta_\zeta(\Gamma + h_z) = 0$ na $D \setminus \{z\}$.

Če je D enostavno povezano, lahko funkcijo h_z izberemo kot rešitev Dirichletovega problema

$$(4.8)\quad \begin{cases} \Delta h_z = 0 & \text{na } D, \\ h_z(\zeta) = -\frac{\log|z-\zeta|}{2\pi} & \text{na } \partial D. \end{cases}$$

(Glej razdelka VIII.2 in VIII.3 za obstoj rešitve.)

Označimo tako dobljeno funkcijo (4.7) z $G(z,\zeta)$.

Ta funkcija ima naslednje lastnosti:

(a) za vsak $z \in D$ je funkcija $G(z,\cdot)$ harmonična na $D \setminus \{z\}$ in $C^1(\overline{D})$;

(b) $G(z,\zeta) = 0$ za $\forall \zeta \in \partial D$;

(c) G ima logaritemski pol pri $z = \zeta$:

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi} \log|z-\zeta| + O(1).$$

Ker je $\lim_{\zeta \to z} G(z,\zeta) = -\infty$, sledi iz (b) in principa maksimuma, da je $G(z,\zeta) < 0$ za $\forall z,\zeta \in D$.

<u>Definicija</u>: Funkcija $G(z,\zeta)$ z lastnostmi (a), (b), (c) se imenuje <u>Greenova funkcija domene</u> D.

Iz povedanega sledi, da Greenova funkcija obstaja na vsakem enostavno povezanem omejenem območju $D \subset \mathbb{C}$ z gladkim (ali odsekoma gladkim) robom, saj smo jo dobili iz rešitve homogenega Dirichletovega problema (4.8). S splošnejšimi metodami (t.i. Perronovo metodo) se dá pokazati, da je homogen Dirichletov problem rešljiv na vsaki domeni z gladkim robom, zato tudi Greenova funkcija obstaja na vsaki toki domeni.

Če uporabimo Greenovo formulo (4.2) z Greenovo funkcijo domene D, je $G(z,\cdot) = 0$ na ∂D, zato člen z $\partial_n u$ v integralu po ∂D izgine in dobimo

IZREK. Naj bo $G(z,\zeta)$ Greenova funkcija domene D s polom v točki $z \in D$. Tedaj za vsako funkcijo $u \in C^2(\overline{D})$ velja reprezentacijska formula

(4.9)
$$u(z) = \int_{\partial D} u(\zeta) \cdot \partial_n G(z,\zeta)\, ds + \iint_D G(z,\zeta) (\Delta u)(\zeta) \cdot dx\, dy$$

Funkcija $P_z(\zeta) = \partial_n G(z,\zeta)$ $(z \in D,\ \zeta \in \partial D)$ se imenuje Poissonovo jedro domene D.

Posledica. Če je $u \in C(\overline{D}) \cap \mathrm{Harm}(D)$ harmonična na D, velja

$$u(z) = \int_{\partial D} P(z,\zeta)\cdot u(\zeta)\cdot ds \quad ; \quad z \in D, \qquad (4.10)$$

kjer je $P(z,\zeta) = \partial_n G(z,\zeta)$ Poissonovo jedro.

OPOMBA. Da se videti, da se tako definirano Poissonovo jedro ujema s tistim, ki smo ga razvili v razdelkih VIII.1 – VIII.3.

Prav tako se da pokazati, da je (podobno kot $\frac{1}{2\pi}\log|\zeta - z|$) funkcija $G(z,\zeta)$ harmonična v obeh spremenljivkah izven diagonale $\{z = \zeta\}$ in da je $P(z,\zeta) = \partial_n G(z,\zeta)$ harmonična v $z \in D$ za vsak $\zeta \in \partial D$.

POSLEDICA. Če je $u \in C^2(\overline{D})$ rešitev Dirichletovega problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D \\ u = g & \text{na } \partial D, \end{cases}$$

potem velja:

$$u(z) = \int_{\partial D} g \cdot P_z \cdot ds + \iint_D G(z,\cdot)\cdot f \cdot dx\,dy, \qquad (4.11)$$

$$\forall z \in D.$$

PRIMER. Greenova funkcija in reprezentacijska formula na enotnem disku $\mathbb{D} = \{|z|<1\}$.

Greenovo funkcijo zlahka uganemo: za vsako točko $z \in \mathbb{D}$ je $\zeta \to \dfrac{\zeta - z}{1-\zeta\cdot\bar z}$ holomorfen avtomorfizem diska, torej $\left|\dfrac{\zeta-z}{1-\zeta\bar z}\right| = \left|\dfrac{z-\zeta}{1-\bar\zeta\cdot z}\right| = 1$ na $\{|\zeta|=1\}$.

Funkcija

$$G(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar\zeta z}\right| = \frac{1}{2\pi}\cdot\log|z-\zeta| - \frac{1}{2\pi}\log|1-\bar\zeta z| \tag{4.12}$$

je torej Greenova funkcija na disku $\mathbb{D}$.

Sedaj izračunajmo še normalni odvod $\partial_n G(z,\zeta)$ pri $|\zeta|=1$. V ta namen pišimo $\zeta = \rho e^{it}$; normalni odvod je sedaj $\left.\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}$.

$$\left.\frac{\partial}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}\log|z-\rho e^{it}| = \left.\frac{\partial}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}\frac{1}{2}\log|z-\rho e^{it}|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|z-e^{it}|^2}\cdot\left(-e^{it}(\bar z - e^{-it}) + (z-e^{it})(-e^{-it})\right)$$

$$= \frac{1-\operatorname{Re}(ze^{-it})}{|z-e^{it}|^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\Big|_{\rho=1} \log |1-\bar{\zeta} z| = \frac{\partial}{\partial \rho}\Big|_{\rho=1} \frac{1}{2}\log |1-z\rho e^{-it}|^2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|1-ze^{-it}|^2}\left(-ze^{-it}(1-\bar{z}e^{it})+(1-ze^{-it})(-\bar{z}e^{it})\right)$$

$$= \frac{1}{|e^{it}-z|^2}\cdot\left(|z|^2-\operatorname{Re}(ze^{-it})\right).$$

Če odštejemo, dobimo

$$\partial_n G(z,e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot P_z(t), \qquad (4.13)$$

kjer je $P_z(t)$ Poissonovo jedro (2.1).

Greenova reprezentacijska formula na disku $\mathbb{D}$ (4.9) je torej:

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_z(t)\cdot u(e^{it})\frac{dt}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\iint_{|\zeta|^2=x^2+y^2\leq 1} \log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right|\cdot\Delta u(\zeta)\cdot dx\,dy \qquad (4.14)$$

Formula velja za vsako točko $z\in\mathbb{D}$ in funkcijo $u\in C^2(\overline{\mathbb{D}})$. Če pa je u harmonična na $\mathbb{D}$, drugi integral odpade in dobimo

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P_z(t)u(e^{it})\frac{dt}{2\pi}.$$

Greenova formula na disku $\mathbb{D}$ (4.14) ima še posebej preprosto obliko pri $z=0$:

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{it})\,dt+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta|\le 1}\log|\zeta|\cdot(\Delta u)(\zeta)\,.\,dx\,dy\,.$$

<u>Trditev</u>. Greenova funkcija $G(z,\zeta)$ domene D je simetrična:

$$G(z,\zeta)=G(\zeta,z)\,. \tag{4.15}$$

Zato je $G(z,\zeta)$ harmonična v obeh spremenljivkah na $\{(z,\zeta)\in D\times D:\ z\neq\zeta\}$.

<u>Dokaz</u>. Naj bosta $z\neq\zeta$ dve različni točki domene D. Ogledamo si funkciji

$$u(\xi)=G(z,\xi)\,;\quad \xi\in\overline{D}\setminus\{z\}$$
$$v(\xi)=G(\zeta,\xi)\,;\quad \xi\in\overline{D}\setminus\{\zeta\}.$$

Naj bo $\varepsilon>0$ majhen in

$$D_\varepsilon=D\setminus\big(\mathbb{D}(z,\varepsilon)\cup\mathbb{D}(\zeta,\varepsilon)\big).$$

Uporabimo Greenovo formulo (VII. 5.4) na D_ε:

Pri tem upoštevajmo $u = 0$ na ∂D, $v = 0$ na ∂D, ter $\Delta u = 0$ in $\Delta v = 0$ na $D_\varepsilon \subset D \setminus \{z, \zeta\}$.

Sledi:

$$\int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} (v \cdot \partial_n u - u \cdot \partial_n v) \cdot ds = \int\limits_{|\xi - \zeta| = \varepsilon} (u \cdot \partial_n v - v \cdot \partial_n u) \cdot ds \tag{4.16}$$

Funkcija u ima logaritemski pol v točki z:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \log|\xi - z| + O(1); \quad \xi \to z.$$

Ker je $|\partial_n v|$ omejena v točki z, sledi pri limitnem prehodu

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} u \cdot \partial_n v \cdot ds = 0.$$

Enak račun kot v dokazu formule (4.2) pokaže

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} v \cdot \partial_n u \cdot ds = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{|\xi - z| = \varepsilon} v(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot ds = v(z).$$

Podobno vidimo, da je limita desne strani v (4.16) enaka $u(\zeta)$.

Sledi: $u(\zeta) = v(z)$, oziroma

$$G(z, \zeta) = G(\zeta, z).$$

Posledica.

(a) Poissonovo jedro $P(z,\zeta) = \frac{\partial}{\partial n} G(z,\zeta)$ $(z \in D,\ \zeta \in \partial D)$ je harmonična funkcija spremenljivke $z \in D$ za vsak $\zeta \in \partial D$.

(b) $G(z,\zeta) = 0$ za vsak $z \in \partial D$ in $\zeta \in \overline{D} \setminus \{z\}$.

Dokaz. (a) Ker je $z \mapsto G(z,\zeta) = G(\zeta, z)$ harmonična na $z \in D$ za vsak $\zeta \neq z$, je tudi odvod $\partial_n G(z,\zeta)\big|_{\zeta \in \partial D}$ harmonična v spremenljivki $z \in D$.

(b) $G(z,\zeta) = G(\zeta, z) = 0$ za $z \in \partial D$, $\zeta \in \overline{D} \setminus \{z\}$.

POSLEDICA. Za vsako funkcijo $g \in C(\partial D)$ je Poissonov integral

$$D \ni z \longmapsto \int_{\partial D} P_z(\zeta)\, g(\zeta) \cdot ds$$

harmonična funkcija na D.

VIII.5. Rešitev nehomogenega Dirichletovega problema.

Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ omejeno območje z gladkim robom, $f \in C(\overline{D})$ dana zvezna funkcija na $\overline{D}$ in $g \in C(\partial D)$ zvezna funkcija na ∂D.

IZREK. Dirichletov problem

$$(5.1) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{na } D \\ u = g & \text{na } \partial D \end{cases}$$

ima natanko eno rešitev na D, ki je podana z Greenovo formulo:

$$(5.2) \quad u(z) = \int_{\partial D} P(z,\zeta)\cdot g(\zeta)\cdot ds + \iint_{D} G(z,\zeta)\cdot f(\zeta)\, dx\, dy.$$

Dokaz. Izreka ne bomo v celoti dokazali zaradi tehnične zahtevnosti. Lahko pa ga dokažemo v primeru, ko je $f \in C^2(\overline{D})$.

Rešitev u, če obstaja, je podana z (5.2) po izreku na str. VIII.22 (glej (4.9)). Zato zadošča dokazati obstoj rešitve.

Lema. Naj bo $f \in \mathcal{C}^2(\overline{D})$. Funkcija

$$F(z) = \iint_D \frac{1}{2\pi} \log|z-\zeta| \cdot f(\zeta)\, dx\, dy$$

je razreda $\mathcal{C}^2$ in zadošča enačbi

$$\Delta F = f \quad \text{na } D.$$

Dokaz. Oglejmo si najprej poseben primer $f \in \mathcal{C}^2_c(\mathbb{C})$; to je, f ima kompakten nosilec.

Tedaj je

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} \log|z-\zeta| \cdot f(\zeta)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} \log|\xi| \cdot f(z+\xi) \cdot dx\, dy$$

$(\xi = x+iy)$.

Ker je $f \in \mathcal{C}^2$ in $\log|\xi| \in L^1_{loc}$, lahko odvajamo pod integralom:

$$\Delta F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} \log|\xi| \cdot \Delta_z f(z+\xi) \cdot dx\, dy.$$

(zamenjava spremenljivke) $$= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{C}} \log|z-\zeta| \cdot \Delta_\zeta f(\zeta) \cdot dx\, dy$$

$$= f(z) \qquad \text{po } (4.4).$$

<u>Splošen primer.</u> Fiksiramo točko $a \in D$ in izberemo $r > 0$ dovolj majhen, da je $\overline{\mathbb{D}(a,r)} \subset D$. Dokazali bomo, da velja

$\Delta F(z) = f(z)$ za vsak $z \in \mathbb{D}(a,r)$. Ker je $a \in D$ poljubna, izrek sledi.

Izberemo gladko funkcijo $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ s kompaktnim nosilcem $\operatorname{supp}\chi \subset D$, tako da je $\chi \equiv 1$ na $\mathbb{D}(a,r)$. Potem je za $z \in \mathbb{D}(a,r)$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_D \log|z-\zeta| \cdot \chi(\zeta) f(\zeta)\, dx\, dy$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint_D \log|z-\zeta| \cdot (1-\chi(\zeta)) \cdot f(\zeta)\, dx\, dy .$$

Funkcija χf v prvem integralu ~~ima~~ kompakten nosilec, zato po že dokazanem sledi, da je Laplace tega integrala enak $(\chi \cdot f)(z)$ za $z \in \mathbb{D}(a,r)$. Ker je $\chi(z) = 1$, dobimo $f(z)$.

V drugem integralu je $(1-\chi)f$ enaka 0 na $\zeta \in \mathbb{D}(a,r)$, zato integriramo le po $D \setminus \overline{\mathbb{D}}(a,r)$. Ker je $\log|z-\zeta|$ harmonična v ~~za~~ $z \in \mathbb{D}(a,r)$ in $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(a,r)$, je rezultat harmonična fn. na $\mathbb{D}(a,r)$. Torej je Laplace $\Delta F(z) = f(z)$.

Lema je s tem dokazana.

Rešitev u problema (5.1) iščemo v obliki

$$u(z) = v(z) + F(z),$$

kjer je

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_D \log|z-\zeta| \cdot f(\zeta)\, dx\, dy$$

in je v harmonična funkcija na D.

Tedaj je $\Delta u = \Delta v + \Delta F = 0 + f = f$,

torej u zadošča prvemu pogoju v (5.1).

Sedaj izberemo v kot rešitev homogenega Dirichletovega problema

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{na } D, \\ v = g - F & \text{na } \partial D \end{cases}$$

Tako funkcijo v dobimo s pomočjo Poissonovega integrala. ~~Po~~ Očitno sedaj $u = v + F$ zadošča tudi pogoju $u = g$ na ∂D.