

Analiza 1

Zaporedja

- (1) Ugotovi, ali sta zaporedji z danima splošnima členoma monotoni oziroma omejeni:

(a) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$

(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$

- (2) Fibonaccijevo zaporedje je podano z začetnima členoma $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$ ter rekurzivno zvezo

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Določi splošni člen zaporedja.

- (3) Zaporedje je podano z začetnima členoma $a_0 = a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n$$

za $n \in \mathbb{N}_0$. Določi splošni člen zaporedja.

- (4) Hodnik dimenzije $n \times 1$ bi radi pokrili s ploščami 9 različnih barv, pri čemer so 4 plošče dimenzije 1×1 , 5 plošč pa je dimenzije 2×1 . Na koliko različnih načinov lahko pokrijemo hodnik?

- (5) Po definiciji dokaži, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n - 5 \cos \frac{n\pi}{2}}{2n - 1} = 3.$$

- (6) Izračunaj limite zaporedij:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n - 3}{7n - 3n^3 + 2},$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}),$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 \sqrt{n^2 + 1} - n^3),$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n+3},$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\log_2(2n-1) - \log_2 n - 1).$

- (7) Določi vsa stekališča danega zaporedja in za vsako stekališče poišči podzaporedje, ki k temu stekališču konvergira:

(a) $a_n = (-1)^n - 1,$

(b) $b_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$

(c) Zaporedje $c_n = c(n)$, ki ga podaja bijekcija $c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}.$

(8) Določi $\limsup(a_n)$ in $\liminf(a_n)$ za zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \frac{4}{n} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{n}.$$

(9) Zaporedje je podano z začetnim členom $a_1 = 1$ in rekurzivno zvezo

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}a_n^2.$$

za $n \in \mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito. Kaj pa, če vzamemo drug začetni člen a_1 ?

(10) Izračunaj limiti danih zaporedij:

(a) $a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ korenov}},$

(b) $b_n = \underbrace{\sin(\sin(\dots(\sin(1))))}_{n \text{ sinusov}}.$

(11) Izračunaj limito zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ki je dano s predpisom $a_n = \frac{1000^n}{n!}$.

(12) (a) Naj bo zaporedje (x_n) konvergentno z limito x . Dokaži, da potem tudi zaporedje $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)$ konvergira proti x .

(b) Naj bo zaporedje (x_n) , $x_n > 0$, konvergentno z limito $x > 0$. Dokaži, da potem tudi zaporedje $(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n})$ konvergira proti x .

(13) Naj za zaporedje (a_n) , $a_n > 0$, obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a > 0$. Pokaži, da potem velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$. S primerom pokaži, da obratno ne velja. Nato izračunaj limite:

(a) $a_n = \sqrt[n]{n},$

(b) $a_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$

(c) $a_n = \frac{\ln n}{n}.$

(14) Izračunaj limito zaporedja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

(15) Pokaži, da je zaporedje $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s splošnim členom

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$$

konvergentno.