

Analiza 1

Vrste

- (1) Izračunaj obseg in ploščino Kochove snežinke.
- (2) Vlaka, ki sta na začetni razdalji 100 km, se vozita eden proti drugemu vsak s hitrostjo 50 km/h. Med njima leti muha s hitrostjo 100 km/h, izmenično od enega do drugega. Kolikšno pot opravi muha med letom?
- (3) Karte z enotsko maso in z dolžino 2 zlagamo eno nad drugo, tako da je vsaka karta malce desno od karte, ki je pod njo. Kako dolg most lahko teoretično zgradimo iz takšnega sistema kart?
- (4) Z uporabo razcepa na delne ulomke seštej vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)},$$

kjer je $k \geq 0$.

- (5) Pokaži, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

divergira.

- (6) Obravnavaj konvergenco vrst:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}},$

- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+3n},$

- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}.$

- (7) Obravnavaj konvergenco vrst:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a > 0,$

- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}, a > 0, s \in \mathbb{R},$

- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(an)^n}, a > 0,$

- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}.$

(8) Obravnaj konvergenco vrst:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a > 0$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$.

(9) Naj bo (x_n) padajoče zaporedje pozitivnih realnih števil. Dokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$.

(10) Naj bo (a_n) konvergentno zaporedje pozitivnih realnih števil z limito $a > 0$. Obravnaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{a_n}\right)^n,$$

kjer je $x > 0$.

(11) Naj bosta b in c pozitivni realni števili in definirajmo zaporedje (a_n) s predpisom

$$a_n = \frac{b(b+1)(b+2)\dots(b+n-1)}{c(c+1)(c+2)\dots(c+n-1)}.$$

(a) Obravnaj konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$.

(b) Naj bo $c > b$. Dokaži, da zaporedje (a_n) konvergira in določi njegovo limito.

(c) Izračunaj limito $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

(12) Obravnaj absolutno in pogojno konvergenco naslednjih vrst:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $|a| \neq 1$.

(13) Obravnaj absolutno in pogojno konvergenco naslednjih vrst:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\alpha}}, \alpha > 0,$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n},$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \operatorname{tg} \frac{1}{n},$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}, a > 0.$$

(14) Obravnaj absolutno in pogojno konvergenco vrste

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \dots$$

(15) Z upoštevanjem rezultata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

poišči vsoto spodnje vrste, ki jo dobimo z zamenjavo vrstnega reda členov dane vrste:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \dots$$