

Analiza 1

2. izpit

4. 7. 2017

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $f(-1)f(1) = -2$, ima ničlo.



Obstaja neskončnokrat odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je ne moremo razviti v Taylorjevo vrsto s središčem v 0.



Če je liha funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva v točki a , je odvedljiva tudi v točki $-a$.



Če je $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna omejena funkcija in $a \geq 2$, potem obstaja integral $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^a} dx$.



Vsaka omejena množica $A \subset \mathbb{R}$ ima najmanjši element.



Funkcija $f(x) = x^3$ ni enakomerno zvezna na \mathbb{R} .



Odprta krogla ni zaprta množica v nobenem metričnem prostoru.



Obstaja neomejena Riemannovo integrabilna funkcija $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$.



Če ne obstaja $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, funkcija f ni zvezna v točki a .



Obstaja okolica števila 1, ki ne vsebuje nobenega iracionalnega števila.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $A \subset \mathbb{R}$ omejena množica z natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M ter $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Z $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ označimo sliko množice A .

a) Dokaži, da je množica $f(A)$ omejena.

b) Poišči taka primera množice A in funkcije f , da bo $\inf f(A) \neq f(m)$ in $\sup f(A) \neq f(M)$.

c) Dokaži, da za naraščajočo funkcijo f velja $\inf f(A) = f(m)$ in $\sup f(A) = f(M)$.

3. naloga (20 točk)

Skiciraj parametrično podano krivuljo

$$x = \frac{t^2}{t-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

4. naloga (20 točk)

Izračunaj ploščino območja, ki ga oklepajo krivulje z enačbami $y = e^{2x} \sin e^x$, $y = -\frac{1}{1+e^{2x}}$, $x = \ln 2\pi$ in $x = \ln 3\pi$.

5. naloga (20 točk)

Naj bo $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ zaporedje vseh njenih ničel. Predpostavimo, da funkcija f spremeni predznak v vsaki od svojih ničel, da je zaporedje a_n neomejeno, zaporedje $c_k = \left| \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x) dx \right|$ pa monotonno pada proti 0. Dokaži, da tedaj konvergira integral $\int_0^\infty f(x) dx$.