

--	--	--	--	--	--	--	--

 $\Sigma$ 

--

Ime in priimek \_\_\_\_\_

Vpisna številka

## 1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna 

P
---

 oziroma napačna 

N
---

.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

P
---

Naj bosta  $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  taki zvezni funkciji, da sta odvedljivi na  $(-1, 1)$ , njuna odvoda pa sta enaka. Če velja  $f(0) = 1$  in  $g(0) = 2$ , potem za vsak  $x \in [-1, 1]$  velja  $g(x) = f(x) + 1$ .

P
---

Funkcija  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  je enakomerno zvezna na intervalu  $(-1, 1)$ .

N
---

Vsaka zvezna funkcija  $f : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  ima omejeno zalogo vrednosti.

N
---

Enakomerno zvezna funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je odvedljiva na  $(0, 1)$ , ima na intervalu  $(0, 1)$  omejen odvod.

N
---

Funkcija  $f(x) = \frac{x}{|x|}$  ima limito v točki  $x = 0$ .

N
---

Če je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strogo padajoča odvedljiva funkcija, za vsak  $x \in \mathbb{R}$  velja  $f'(x) < 0$ .

P
---

Obstaja odvedljiva funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , katere odvod ni zvezna funkcija.

P
---

Če je funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna, potem velja  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(e^{-n}) = f(0)$

P
---

Če je  $f : (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  taka odvedljiva funkcija, da velja  $f(0) = 1$  in  $f(1) = 0$ , obstaja točka  $c \in (-1, 2)$ , za katero velja  $f'(c) = -1$ .

N
---

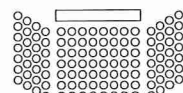
Če odvedljiva funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nima ne globalnega maksimuma, ne globalnega minimuma, nima tudi nobene stacionarne točke.

## 2. kolokvij iz Analize 1

25. 1. 2017

Veliko uspeha!

Ime in priimek \_\_\_\_\_



Sedež (2.05)

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
5	
Σ	

### 2. naloga (20 točk)

Dana je funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/(x-1)} & ; x < 1 \\ a + (1+bx) \ln x & ; x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Določi konstanti  $a$  in  $b$ , tako, da bo funkcija  $f$  odvedljiva.  
 (b) Pri vrednostih  $a$  in  $b$ , določeni v točki (a), določi zalogo vrednosti funkcije  $f$  in se prepričaj, da obstaja inverzna funkcija  $f^{-1}$ .  
 (c) Izračunaj odvod  $(f^{-1})'(1-e)$ .

(a) Funkcija je zvezna in odvedljiva na intervalih  $(-\infty, 1)$  in  $(1, \infty)$ .

Zveznost v 1:

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \downarrow 1} f(x) = a + 0 = a$$

$$\Rightarrow a = 0 = f(1)$$

Odvod v 1:

$$\lim_{x \uparrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \uparrow 1} \frac{e^{\frac{1}{x-1}} - 0}{x - 1} \stackrel{t = \frac{1}{x-1}}{\downarrow} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} -\frac{u}{e^u} \stackrel{u = -t}{=} \lim_{u \rightarrow \infty} -\frac{1}{e^u} = 0$$

$$\lim_{x \downarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \left[ b \ln x + (1+bx) \frac{1}{x} \right] \Big|_{x=1} =$$

$$= 1+b$$

$\Rightarrow$

$$b = -1$$

$$f'(1) = 0$$

2. naloga

$$(b) \textcircled{5} f'(x) = \begin{cases} -\frac{e^{1/(x-1)}}{(x-1)^2} & ; x < 1 \\ 0 & ; x = 1 \\ -\ln x + \frac{1-x}{x} & ; x > 1 \end{cases}$$

$\begin{matrix} \wedge & \wedge \\ 0 & 0 \end{matrix}$

Ugotovimo, da je  $f'(x) < 0$  za vse  $x \neq 1$  in  $f'(1) = 0 \Rightarrow f$  strogo pada

$$\Rightarrow Z_f = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) =$$

$$= \left( \lim_{x \rightarrow \infty} (1-x) \ln x, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} \right) = (-\infty, 1)$$

ker  $f$  strogo pada, je injektivna  
in  $\exists f^{-1}: (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(c) \textcircled{5} f(a) = 1-e = (1-a) \ln a$$

Ugotovimo  $a = f^{-1}(1-e) = e$ .

$$(f^{-1})'(1-e) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1-e))} = \frac{1}{f'(e)} =$$

$$= \left( -\ln e + \frac{1-e}{e} \right)^{-1} = \left( \frac{1-2e}{e} \right)^{-1} = \frac{e}{1-2e}$$

3. naloga (20 točk)

Izračunaj limiti.

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

(b)  $\lim_{x \uparrow 1} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}$

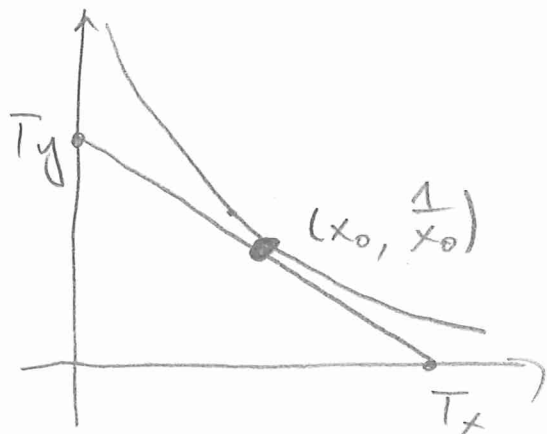
(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \stackrel{\text{"0/0"}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{\ln x} + \frac{x}{\cancel{\ln x}} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \stackrel{\text{"0/0"}}{=}$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$  (10)

(b)  $\lim_{x \uparrow 1} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{4} \right) \right)^{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi x}{2} \right)} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2x}{1-x^2}} =$   
 $\operatorname{tg} u = x$

$\operatorname{tg} 2u = \frac{2 \operatorname{tg} u}{1 - \operatorname{tg}^2 u} \rightarrow -1$   
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \left[ x^{\frac{1}{x-1}} \right]^{\frac{-2x}{1+x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$  (10)  
 $\underbrace{\left( 1 + (x-1) \right)^{\frac{1}{x-1}}}_{\downarrow e}$

#### 4. naloga (20 točk)

Za točko  $T$  na grafu funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$ , za  $x > 0$ , označimo s  $T_x$  in  $T_y$  presečišče tangente na graf  $f$  v  $T$  z abscisno oziroma ordinatno osjo. Nadalje naj bo  $O$  središče koordinatnega sistema. Za katero točko  $T$  na grafu  $f$  ima trikotnik  $OT_xT_y$  najmanjši obseg?



$$\text{Tangentna: } y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$$

$$y = -\frac{x}{x_0^2} + \frac{2}{x_0} \Rightarrow \textcircled{5}$$

$$\Rightarrow T_y(0, \frac{2}{x_0}), T_x(2x_0, 0)$$

$$\text{Obseg: } \sigma = 2x_0 + \frac{2}{x_0} + \sqrt{4x_0^2 + \frac{4}{x_0^2}}$$

Iščemo min za  $g(x) = x + \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$  na  $(0, \infty)$ . Opazimo, da je  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) =$

$$= \infty$$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2x - \frac{2}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{x(1 - \frac{1}{x^2})}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} =$$

$$= (1 - \frac{1}{x^2}) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} \right) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \textcircled{10}$$

ker je  $g'(x) < 0$  za  $x < 1$  in  $g'(x) > 0$  za  $x > 1$ , je pri  $x = 1$  globalni min,

torej je  $T(1, 1)$ .  $\textcircled{5}$

5. naloga (20 točk)

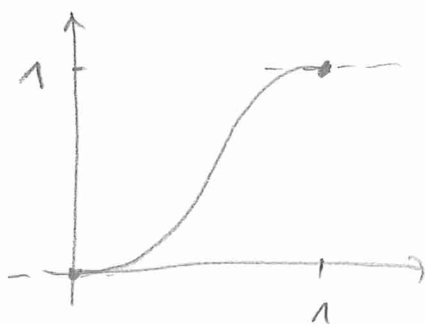
Naj bo  $M$  množica vseh 2-krat zvezno odvedljivih funkcij  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ki zadoščajo pogojem

$$f'(0) = f'(1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1.$$

(a) Poišči ekspliciten predpis kakšne funkcije iz  $M$ .

(b) Naj bo  $f \in M$ . Pokaži, da obstaja točka  $c \in (0, 1)$ , za katero je  $|f''(c)| \geq 2$ .

(a) 5



Lahko uporabimo  
"kos" sinusne krivulje:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

$$(f(0) = 0, f(1) = 1)$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (f'(0) = 0, f'(1) = 0)$$

(b) 15

Po Lagrangevem izreku  $\exists d \in (0, 1)$ :

$$f(1) - f(0) = f'(d)(1 - 0), \text{ oz. } f'(d) = 1.$$

Pecimo, da je  $d \leq \frac{1}{2}$ . Po Lagrangeu

na  $f'$  dobimo obstaj  $c \in (0, \frac{1}{2})$ :

$$f'(d) - f'(0) = f''(c)(d - 0) \Rightarrow f''(c) = \frac{1}{d} \geq 2$$

$\uparrow$   
 $d \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |f''(c)| \geq 2$$

Če je  $d > \frac{1}{2}$ :  $\exists c \in (d, 1)$ :

$$f'(d) - f'(1) = f''(c)(d - 1) \Rightarrow f''(c) = \frac{1}{d - 1}$$

$$d - 1 \in (-\frac{1}{2}, 0) \Rightarrow f''(c) \leq -2 \Rightarrow |f''(c)| \geq 2$$