

### Rešitve 3. kolokvija iz Analize 1

- (1) **P** Če je  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna in za  $x \in [0, 1]$  velja  $f(x) \leq 2x$ , potem je  $\int_0^1 f(x)dx \leq 1$ .
- P** Če je funkcija  $f$  Riemannovo integrabilna na intervalu  $[-1, 1]$ , je Riemannovo integrabilna tudi na intervalu  $[0, 1]$
- N** Tir parametrično podane krivulje  $\vec{r}(t) = (1 + 2 \cos t, 1 + 2 \sin t)$  za  $t \in [0, 2\pi]$  je krožnica s polmerom  $R = 1$ .
- N** Če sta  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zvezno odvedljivi funkciji, je krivulja, podana s parametrizacijo  $x = f(t)$  in  $y = g(t)$ , brez samopresečišč.
- P** Vsaka Riemannovo integrabilna funkcija je omejena.
- P** Naj bo  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva funkcija, za katero je  $f(1) = 0$  in  $f'(x) = \frac{1}{x}$  za vsak  $x \in (0, \infty)$ . Potem je  $f(x) = \ln x$  za vsak  $x \in (0, \infty)$ .
- P** Funkcija  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom  $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$  je enakomerno zvezna.
- N** Če je  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  taka zvezna funkcija, da obstaja integral  $\int_0^\infty f(x)dx$ , potem obstaja tudi integral  $\int_0^\infty \sqrt{f(x)}dx$ .
- P** Posplošeni integral  $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx$  konvergira.
- N** Funkcija  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  je zvezna natanko takrat, ko je integrabilna.

(2) Ravninska krivulja  $K$  je podana v polarnih koordinatah s predpisom

$$r(\phi) = \frac{1}{\sin \phi + \cos \phi + 2}$$

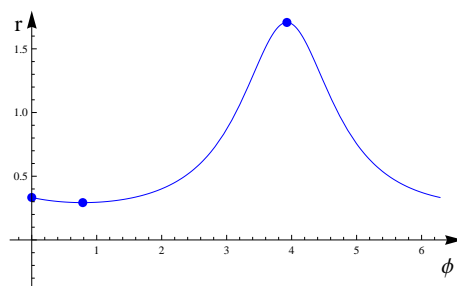
za  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

- (a) Poišči stacionarne točke in intervale naraščanja oziroma padanja funkcije  $r = r(\phi)$ . Nato skiciraj njen graf.
- (b) Poišči vse točke na krivulji  $K$ , v katerih je tangenta navpična ali vodoravna. Nato skiciraj krivuljo  $K$ .

*Rešitev:* (a) Funkcija  $r$  je zvezna in periodična s periodo  $2\pi$ . Njen odvod je enak

$$r'(\phi) = -\frac{\cos \phi - \sin \phi}{(\sin \phi + \cos \phi + 2)^2}.$$

Od tod sklepamo, da ima  $r$  stacionarni točki  $\phi_1 = \frac{\pi}{4}$  in  $\phi_2 = \frac{5\pi}{4}$ . Narašča na intervalu  $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ , pada pa na intervalih  $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$ . Poglejmo še njen graf.



(b) Kartezični koordinati točke na krivulji sta:

$$x(\phi) = r(\phi) \cos \phi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi + \cos \phi + 2},$$

$$y(\phi) = r(\phi) \sin \phi = \frac{\sin \phi}{\sin \phi + \cos \phi + 2},$$

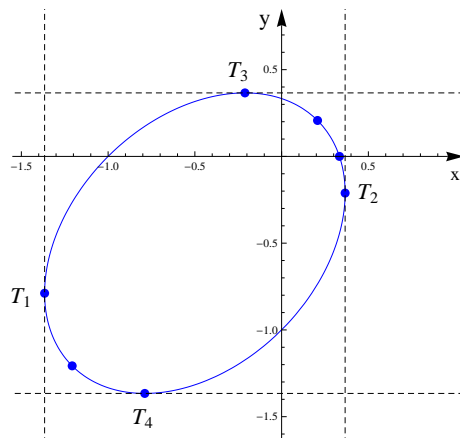
odvoda koordinat po parametru  $\phi$  pa:

$$x'(\phi) = \frac{-1 - 2 \sin \phi}{(\sin \phi + \cos \phi + 2)^2},$$

$$y'(\phi) = \frac{1 + 2 \cos \phi}{(\sin \phi + \cos \phi + 2)^2}.$$

Tangenti sta torej navpični v točkah, ki ustrezata kotoma  $\phi \in \{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$ . To sta točki  $T_1(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-\sqrt{3}}{6})$  in  $T_2(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{6})$ . Vodoravni pa sta v točkah  $T_3(\frac{-3+\sqrt{3}}{6}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$  in  $T_4(\frac{-3-\sqrt{3}}{6}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2})$ , ki ustrezata kotoma  $\phi \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ .

Dobljena krivulja  $K$  je elipsa, ki je zavrneta za kot  $45^\circ$  glede na standardno lego.



□

- [5] Stacionarne točke in intervali naraščanja ter padanja funkcije  $r$ .
- [5] Graf funkcije  $r$ .
- [4] Izračun točk, v katerih so tangente navpične ali vodoravne.
- [6] Skica krivulje  $K$ .

(3) Izračunaj nedoločena integrala

$$(a) \int \frac{2 \cos^3 x - \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx,$$

$$(b) \int \frac{6e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)^2} dx.$$

*Rešitev:*

$$(a) \int \frac{2 \cos^3 x - \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx :$$

Če uvedemo novo spremenljivko  $t = \sin x$ , bo  $dt = \cos x dx$  in tako dobimo

$$\int \frac{2 \cos^3 x - \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx = \int \frac{1 - 2t^2}{\sqrt{2 - t^2}} dt.$$

Prišli smo do integrala korenske funkcije, ki ga bomo izračunali z nastavkom

$$\int \frac{1 - 2t^2}{\sqrt{2 - t^2}} dt = (At + B)\sqrt{2 - t^2} + \int \frac{C}{\sqrt{2 - t^2}} dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{1 - 2t^2}{\sqrt{2 - t^2}} = A\sqrt{2 - t^2} + \frac{-At^2 - Bt + C}{\sqrt{2 - t^2}} = \frac{2A - 2At^2 - Bt + C}{\sqrt{2 - t^2}}.$$

S primerjavo koeficientov polinomov v števcu dobimo, da je  $A = 1$ ,  $B = 0$  in  $C = -1$ . Od tod sledi

$$\int \frac{1 - 2t^2}{\sqrt{2 - t^2}} dt = t\sqrt{2 - t^2} - \arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C$$

in

$$\int \frac{2 \cos^3 x - \cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}} dx = \underline{\underline{\sin x \sqrt{2 - \sin^2 x} - \arcsin\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}\right) + C.}}$$

$$(b) \int \frac{6e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)^2} dx :$$

Sedaj vzemimo novo spremenljivko  $t = e^x$ . Potem je  $dt = e^x dx$  in

$$\int \frac{6e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)^2} dx = \int \frac{6t + 10}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt.$$

V števcu imamo nerazcepen kvadratni polinom  $t^2 + 2t + 2 = (t + 1)^2 + 1$ . Da si računanje malce olajšamo, definirajmo še  $u = t + 1$ , kar nam dani integral prevede v obliko

$$\int \frac{6t + 10}{(t^2 + 2t + 2)^2} dt = \int \frac{6u + 4}{(u^2 + 1)^2} du.$$

Ta integral bomo izračunali z uporabo nastavka

$$\int \frac{6u + 4}{(u^2 + 1)^2} du = A \ln(u^2 + 1) + B \arctg u + \frac{C + Du}{u^2 + 1}.$$

Z odvajanjem pridemo do enačbe

$$\frac{6u + 4}{(u^2 + 1)^2} = \frac{2Au^3 + (B - D)u^2 + (2A - 2C)u + (B + D)}{(u^2 + 1)^2},$$

iz katere dobimo, da je  $A = 0$ ,  $B = D = 2$  in  $C = -3$ . Od tod dobimo

$$\frac{6u + 4}{(u^2 + 1)^2} du = 2 \arctan u + \frac{-3 + 2u}{u^2 + 1} + C$$

in

$$\int \frac{6e^{2x} + 10e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)^2} dx = \underline{\underline{2 \arctan(e^x + 1) + \frac{2e^x - 1}{(e^x + 1)^2 + 1} + C.}}$$

□

- [3] Uvedba nove spremenljivke.
- [3] Uporaba nastavka.
- [4] Rezultat.
- [3] Uvedba nove spremenljivke.
- [3] Uporaba nastavka.
- [4] Rezultat.

(4) Ugotovi, za katere  $a, b > 0$  obstaja posplošeni integral

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(1/x^a) \ln x}{x^b} dx.$$

*Rešitev:* Obravnavati moramo konvergenco integrala v okolici  $x = 0$  in pri  $x \rightarrow \infty$ .

$x \rightarrow 0$ : Ko  $x$  pada proti 0, gre  $\operatorname{arctg}(1/x^a)$  proti  $\frac{\pi}{2}$ . Zato ima dana funkcija v točki  $x = 0$  pol, ki je produkt logaritemskega pola in pola stopnje  $b$ . Integral bo torej divergiral, če je  $b \geq 1$ . V kolikor je  $b < 1$ , pa lahko najdemo nek  $\epsilon > 0$ , da bo  $b + \epsilon < 1$ . Potem je

$$\frac{\operatorname{arctg}(1/x^a) \ln x}{x^b} = \frac{x^\epsilon \operatorname{arctg}(1/x^a) \ln x}{x^{b+\epsilon}}.$$

Imamo torej pol stopnje  $s = b + \epsilon < 1$  in funkcijo  $g(x) = x^\epsilon \operatorname{arctg}(1/x^a) \ln x$ , za katero lahko z L'Hospitalovim pravilom preverimo, da velja  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . Od tod sklepamo, da integral konvergira v okolici pola  $x = 0$ , če je  $b < 1$ .

$x \rightarrow \infty$ : Ko gre  $x \rightarrow \infty$ , gre  $1/x^a$  proti 0. Za majhne vrednosti pa vemo, da je  $\operatorname{arctg} t \approx t$ . Torej je  $\operatorname{arctg}(1/x^a) \approx 1/x^a$ . Bolj natančno to pomeni, da je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/x^a)}{1/x^a} = 1,$$

kar lahko pokažemo z uporabo L'Hospitalovega pravila. Pišimo torej

$$\frac{\operatorname{arctg}(1/x^a) \ln x}{x^b} = \frac{(x^a \operatorname{arctg}(1/x^a)) \ln x}{x^{a+b}}.$$

Če upoštevamo, da člen v oklepaju konvergira k 1, se torej integrand pri  $x \rightarrow \infty$  obnaša podobno kot izraz

$$\frac{\ln x}{x^{a+b}}.$$

Če je  $a + b \leq 1$ , bo torej integral divergiral. Če je  $a + b > 1$ , pa lahko najdemo  $\epsilon > 0$ , da bo  $a + b - \epsilon > 1$ . Če pišemo

$$\frac{(x^a \operatorname{arctg}(1/x^a)) \ln x}{x^{a+b}} = \frac{(x^a \operatorname{arctg}(1/x^a)) \frac{\ln x}{x^\epsilon}}{x^{a+b-\epsilon}},$$

bo  $s = a + b - \epsilon > 1$ , funkcija  $g(x) = (x^a \operatorname{arctg}(1/x^a)) \frac{\ln x}{x^\epsilon}$  pa bo konvergirala proti 0, ko bo šel  $x \rightarrow \infty$ . To pomeni, da dani integral konvergira v neskočnosti, če je  $a + b > 1$ .

V obeh primerih pa dani posplošeni integral konvergira, če je  $b < 1$  in  $a + b > 1$ .  $\square$

- [9] Obravnava konvergence pri  $x \rightarrow 0$ .
- [9] Obravnava konvergence pri  $x \rightarrow \infty$ .
- [2] Rezultat.

(5) (a) Pokaži, da za naravni števili  $m$  in  $n$ ,  $n > m$ , velja

$$\sum_{k=m+1}^n \ln k > \int_m^n \ln x \, dx.$$

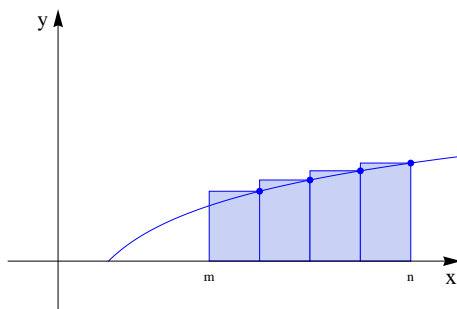
(b) Pokaži, da za vsako naravno število  $n$ ,  $n > 1$ , velja

$$n! > e \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

*Rešitev:* (a) Levo stran neenakosti lahko zapišemo v obliki

$$\sum_{k=m+1}^n \ln k = \ln(m+1) + \ln(m+2) + \dots + \ln n.$$

V tem izrazu prepoznamo zgornjo Darbouxovo vsoto funkcije  $f(x) = \ln x$  na intervalu  $[m, n]$ , prirejeno delitvi, ki jo določajo števila  $m, m+1, \dots, n-1, n$ .



Logaritemska funkcija je zvezna, od koder sledi, da je integrabilna. Njen določeni integral na  $[m, n]$  pa je manjši od poljubne zgornje Darbouxove vsote na tem intervalu. Torej je

$$\sum_{k=m+1}^n \ln k > \int_m^n \ln x \, dx.$$

(b) Vzemimo  $m = 1$ . Na levi strani potem dobimo

$$\sum_{k=2}^n \ln k = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n = \ln n!,$$

na desni pa

$$\int_1^n \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_1^n = n \ln n - n + 1.$$

Z uporabo neenakosti od prej dobimo neenakost

$$\ln n! > n \ln n - n + 1.$$

Z antilogaritmiranjem od tod sledi

$$n! > e^{n \ln n - n + 1} = n^n e^n e = e \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

□

- [6] Opazka, da je na levi strani Darbouxeva vsota.
- [4] Dokaz neenakosti.
- [1] Izbira  $m = 1$ .
- [4] Izračun določenega integrala.
- [5] Dokaz neenakosti.