

Analiza 1

3. izpit

5. 9. 2017

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

N Funkcija $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $f(x) = 0$, če je $x < 0$ in $f(x) = 2017$, če je $x > 0$, ni integrabilna na $[-1, 1]$.

N Obstaja tak metrični prostor M , ki vsebuje zaporedje z dvema limitama.

N Naj bo funkcija $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in odvedljiva na intervalu $(0, 4)$. Če velja $f(3) = f(2) + 1$, potem obstaja taka točka $c \in (2, 3)$, da je $f'(c) = 1$.

N Množici $(0, 1)$ in $(0, 1) \cup \mathbb{Q}$ imata isto moč.

N Obstajata različni neskončnokrat odveljivi funkciji $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki imata enako Taylorjevo vrsto v točki 0.

N Če je $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in velja $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, potem obstaja posplošeni integral $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} dx$.

N Če je številska vrsta absolutno konvergentna, lahko njenim členom poljubno spremenimo predznake in znova dobimo konvergentno vrsto.

N Število a je stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $|a - a_n| < \varepsilon$.

N Funkcija f je diferenciable v točki a , če obstaja taka linearna funkcija $h \mapsto L(h)$, da velja

$$f(a + h) - f(a) = L(h) + o(h)$$

in $\lim_{h \rightarrow 0} o(h) = 0$.

N Če sta x in y iracionalni števili, je produkt xy iracionalno število.

2. naloga (20 točk)

Naj bo $x_0 = 3$, za $n \in \mathbb{N}$ pa definirajmo

$$x_n = \frac{2x_{n-1} - 1}{x_{n-1}}.$$

- a) Dokaži, da to rekurzivno podano zaporedje konvergira in določi njegovo limito.
- b) Ugotovi, kako je s konvergenco tega zaporedja, če je $x_0 < 0$.

3. naloga (20 točk)

Za $r \in \mathbb{Z}$ definiramo funkcijo s predpisom $f(x) = (x - 1)^r$.

- a) Določi take točke na grafu funkcije f , ki razpolavljajo odsek tangente na to točko med koordinatnima osema?
- b) Ali je naloga iz točke a) rešljiva za vse vrednosti parametra r ?

4. naloga (20 točk)

Dana je krivulja K s parametrizacijo

$$x = 2e^{2t} + e^{-t}, \quad y = 8e^{t/2}; \quad 0 \leq t \leq \ln 2.$$

- a) Izračunaj dolžino krivulje K .
- b) Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, če območje med krivuljo K in abscisno osjo zavrtimo okoli abscisne osi.

5. naloga (20 točk)

V kvadrat je včrtana krožnica. Z ene stranice kvadrata do njegove nasprotne stranice položimo vrvico.

- a) Dokaži, da vrvica seka včrtano krožnico.

NAVODILO: Vrvico si predstavlja kot graf primerno izbrane funkcije. Vse korake dokaza natančno utemelji.

- b) Določi najmanjše možno število presečišč.
- c) Ali je moč množice presečišč lahko števna?
- d) Ali ima množica presečišč lahko moč kontinuuma?