

Analiza 1

4. kolokvij

8. 6. 2017

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Funkcijo $f(x) = \sin x$ lahko razvijemo v povsod konvergentno Taylorjevo vrsto s središčem v točki 1.



Če je $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ enakomerno konvergentno zaporedje, obstaja limita $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$ za vsak element $a \in [0, 1]$.



Vsota absolutno konvergentne vrste je neodvisna od vrstnega reda členov.



Če je $c_n > 0$ zaporedje z limito 0, alternirajoča vrsta $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots$ konvergira.



Potenčno vrsto, ki konvergira na intervalu $[1, 2)$, lahko členoma odvajamo na intervalu $(1, 2)$.



Unija poljubne družine odprtih podmnožic poljubnega metričnega prostora je odprta podmnožica.



Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira enakomerno na $[0, \infty)$ k funkciji $f(x) = e^x$.



Če za realno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 0$, ta vrsta absolutno konvergira.



Enakomerno konvergentno zaporedje zvezno odvedljivih funkcij ima zvezno odvedljivo limitno funkcijo.



Množica racionalnih števil je zaprta podmnožica množice realnih števil.

2. naloga (20 točk)

Lemniskato, ki je v polarnih koordinatah podana z enačbo

$$r = \sqrt{\cos 2\varphi},$$

zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunaj površino vrtenine, ki pri tem nastane.

3. naloga (20 točk)

(a) Za $a \neq 0$ obravnavaj konvergenco in absolutno konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-a)^n}{na^{2n}}.$$

(b) Ugotovi, ali konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

4. naloga (20 točk)

(a) Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{x \ln(1+x^2)}{1-x^2}$$

v Taylorjevo vrsto okoli 0.

(b) Z uporabo primerne potenčne vrste izračunaj vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots$$

5. naloga (20 točk)

Naj bo $M = C[0, 1]$ prostor zveznih funkcij na intervalu $[0, 1]$ z metriko d_{∞} . Označimo z L podprostor linearnih funkcij, tj. funkcij oblike $f(x) = ax + b$, s PL pa podprostor odsekoma linearnih zveznih funkcij na $[0, 1]$ (funkcija $f \in M$ je odsekoma linearna, če obstaja delitev $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ intervala $[0, 1]$, da je zožitev f na $[x_i, x_{i+1}]$ linearna za vsak $i = 0, 1, \dots, n-1$).

(a) Obravnavaj zveznost preslikave $F : M \rightarrow L$, ki je definirana s predpisom

$$F(f)(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x.$$

(b) Pokaži, da je L zaprta podmnožica M .

(c) Ugotovi, ali je PL odprta podmnožica M in nato izračunaj njen rob.