

Rešitve 1. izpita iz Analize 1

- (1) P Enačba $z^4 = 1$ ima štiri različne kompleksne rešitve.
- N Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergira enakomerno na \mathbb{R} .
- P Metrični prostor zveznih funkcij $C[0, 1]$ s supremum metriko je poln metrični prostor.
- P Vsako Cauchyjevo zaporedje realnih števil je omejeno.
- N Za vsako padajoče zaporedje pozitivnih realnih števil (a_n) z limito 0 je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.
- N Obstaja odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki ni zvezna v točki $x = 0$.
- P Člene vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ lahko preuredimo tako, da bo vsota nove vrste enaka 2017.
- P Vsaka zvezna funkcija $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ je Riemannovo integrabilna.
- N Vsaka enakomerno zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je omejena.
- P Funkcija $F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^6 + t^4 + 1}$ je zvezna in omejena.

- (2) (a) Dana je funkcija $F : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ s predpisom $F(z) = \frac{1}{z}$. Naj bo K krožnica z enačbo $|z| = 2$ in p premica z enačbo $\text{Im}(z) = 1$. Geometrično opiši množici $F(K)$ in $F(p)$.

(b) Obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{nx^n}$$

v odvisnosti od realnega parametra $x > 0$.

Rešitev: (a) Krožnico K lahko parametriziramo s predpisom $z = 2e^{i\phi}$ za $\phi \in [0, 2\pi)$. Od tod sledi

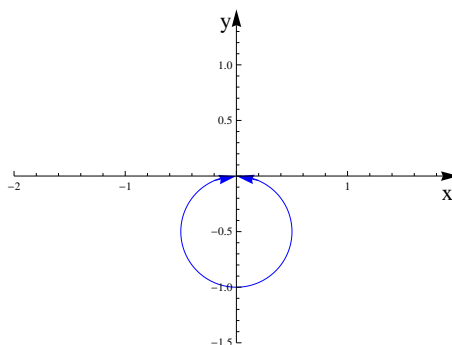
$$F(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{2e^{i\phi}} = \frac{1}{2}e^{-i\phi},$$

kar pomeni, da je $F(K)$ krožnica z enačbo $|z| = \frac{1}{2}$.

Premico p pa lahko parametriziramo s predpisom $z = x + i$ za $x \in \mathbb{R}$. Potem je

$$F(z) = \frac{1}{x+i} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{i}{x^2+1}.$$

Če to parametrično podano krivuljo skiciramo, dobimo krivuljo na spodnji sliki.



Vidimo, da gre za krožnico $|z + \frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$ brez točke $z = 0$. To lahko preverimo tudi računsko.

(b) Vrsto absolutnih vrednosti dane vrste lahko ocenimo navzgor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(x^n)|}{nx^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n}.$$

Za vrsto na desni lahko s kvocientnim ali pa korenskim kriterijem preverimo, da konvergira za $x > 1$. Od tod sledi, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{nx^n}$ absolutno konvergentna za $x > 1$.

Če je $0 < x < 1$, je $0 < x^n < 1$. Za te vrednosti lahko uporabimo oceno $\sin t > \frac{t}{2}$, da dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{nx^n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2nx^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \infty.$$

Za $x = 1$ pa prav tako velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(1)}{n} = \infty.$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^n)}{nx^n}$ torej divergira za $x \in (0, 1]$.

□

- [4] Opis množice $F(K)$.
- [6] Opis množice $F(p)$.
- [5] Dokaz, da vrsta absolutno konvergira za $x > 1$.
- [5] Dokaz, da vrsta divergira za $x \in (0, 1]$.

(3) (a) Dana je funkcija $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \sin x + \frac{x^2}{2}}{x^3} & ; x \neq 0, \\ \frac{1}{2} & ; x = 0. \end{cases}$$

Pokaži, da je funkcija f zvezno odvedljiva.

(b) Določi območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$$

in nato izračunaj njeno vsoto.

Rešitev: (a) Najprej bomo pokazali, da je funkcija f zvezna. Po definiciji je zvezna v točkah $x \neq 0$, za dokaz zveznosti v točki $x = 0$ pa moramo pokazati, da velja

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

To limito bomo izračunali z uporabo Taylorjevega razvoja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots) - (x - \frac{x^3}{6} + \dots) + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

V točkah $x \neq 0$ je odvod funkcije f enak

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{1+x} - \cos x + x)x^3 - 3x^2(\ln(1+x) - \sin x + \frac{x^2}{2})}{x^6},$$

v točki $x = 0$ pa velja:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}}{x^4}, \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots) - (x - \frac{x^3}{6} + \dots) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}}{x^4}, \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da velja $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$, od koder sledi, da je funkcija f zvezno odvedljiva.

(b) Vrsta ima središče v točki $a = 1$, koeficienti pa so $a_n = n$. Konvergenčni polmer vrste je

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

od koder sledi, da vrsta zagotovo konvergira na intervalu $(0, 2)$. V robnih točkah členi vrste ne konvergirajo proti nič, zato tam vrsta ne konvergira.

Naj bo sedaj

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n.$$

Če pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1},$$

lahko vsoto na desni izračunamo s členskim integriranjem. Velja namreč

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} \right) dx = C + \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n = C + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \dots$$

Da bomo lažje izračunali vsoto, bomo vzeli $C = 1$ in nato z uporabo formule za vsoto geometrijske vrste izpeljali, da je

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} \right) dx = \frac{1}{1 - (x-1)} = \frac{1}{2-x}.$$

Z odvajanjem sedaj dobimo, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = (x-1) \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1} = \frac{x-1}{(2-x)^2}.$$

□

- [4] Dokaz zveznosti funkcije f .
- [4] Izračun odvoda.
- [2] Dokaz zveznosti odvoda.
- [2] Območje konvergence potenčne vrste.
- [8] Izračun vsote.

- (4) (a) Odsek krivulje $y = x\sqrt{\ln x}$ za $x \in [1, e]$ zavrtimo okrog abscisne osi. Izračunaj prostornino nastale vrtenine.

(b) Izračunaj ploščino lika

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 \geq 1, 1 \leq x \leq 2\}.$$

Rešitev: (a) Prostornina dane vrtenine je enaka

$$V = \pi \int_1^e x^2 \ln x \, dx.$$

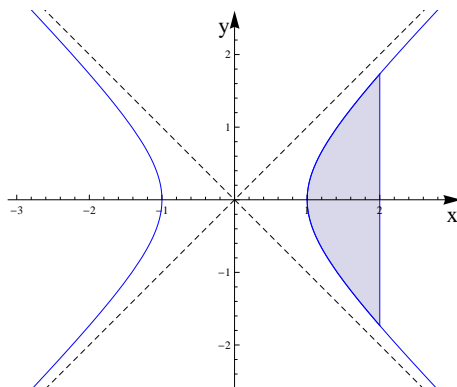
Ta integral lahko izračunamo z integracijo po delih, če vzamemo $u = \ln x$ in $dv = x^2 \, dx$. Potem velja $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$ in

$$\int_1^e x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

Prostornina vrtenine je torej

$$V = \underline{\underline{\frac{\pi(2e^3 + 1)}{9}}}.$$

(b) Imamo lik, ki ga omejujeta hiperbola in premica.



Njegova ploščina je enaka

$$S = 2 \int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \int_1^2 \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx.$$

Nedoločeni integral iracionalne funkcije bomo izračunali s pomočjo nastavka

$$\int \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 - 1} + \int \frac{C}{\sqrt{x^2 - 1}} \, dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2Ax^2 + Bx + (C - A)}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

S primerjavo koeficientov vidimo, da je $A = 1$, $B = 0$ in $C = -1$, od koder sledi

$$\int \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = x\sqrt{x^2 - 1} - \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = x\sqrt{x^2 - 1} + \operatorname{arch} x + C.$$

Ploščina lika pa je enaka

$$S = \int_1^2 \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = (x\sqrt{x^2 - 1} + \operatorname{arch} x) \Big|_1^2 = \underline{\underline{2\sqrt{3} - \operatorname{arch} 2}}.$$

□

- [1] Formula za prostornino vrtenine.
- [7] Integracija po delih.
- [2] Prostornina vrtenine.
- [2] Formula za ploščino lika.
- [6] Integracija iracionalne funkcije.
- [2] Ploščina lika.

(5) Na množico realnih polinomov $\mathbb{R}[x]$ vpeljemo metriko d s predpisom

$$d(p, q) = \int_0^1 |p(x) - q(x)| dx.$$

V nalogi privzemimo, da je d res metrika.

- (a) Obravnavaj zveznost preslikave $D : (\mathbb{R}[x], d) \rightarrow (\mathbb{R}[x], d)$, ki je dana s predpisom $D(p) = p'$.
 (b) Ali je $(\mathbb{R}[x], d)$ poln metrični prostor?

Rešitev: (a) Pokazali bomo, da preslikava D ni zvezna. Označimo s $p_n(x) = x^n$ in z 0 ničelni polinom. Potem velja

$$d(p_n, 0) = \int_0^1 |x^n - 0| dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1},$$

od koder sledi, da zaporedje (p_n) konvergira k ničelnemu polinomu v metriki d . Po drugi strani pa je $D(p_n)(x) = nx^{n-1}$ in $D(0) = 0$. Od tod dobimo

$$d(D(p_n), D(0)) = \int_0^1 |nx^{n-1} - 0| dx = \int_0^1 nx^{n-1} dx = 1.$$

Ker zaporedje slik $(D(p_n))$ ne konvergira k sliki limite zaporedja (p_n) , preslikava D ni zvezna.

(b) Pokazali bomo, da $(\mathbb{R}[x], d)$ ni poln metrični prostor. V ta namen definirajmo zaporedje polinomov

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Vemo, da to zaporedje enakomerno na $[0, 1]$ konvergira k eksponentni funkciji $f(x) = e^x$. Pokažimo najprej, da je zaporedje (T_n) Cauchyjevo. Če je $m > n$, velja

$$d(T_m, T_n) = \int_0^1 \sum_{k=n+1}^m \frac{x^k}{k!} dx = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{(k+1)!} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}.$$

Vrsta na desni je ostanek številske vrste, ki konvergira k e , zato je poljubno majhna, če sta m in n dovolj velika.

Sedaj bomo pokazali, da zaporedje nima limite v $\mathbb{R}[x]$. Metrični prostor $(\mathbb{R}[x], d)$ je podprostor prostora zveznih funkcij $C[0, 1]$ z metriko d . Ker (T_n) enakomerno na $[0, 1]$ konvergira k eksponentni funkciji, je limita tega zaporedja v $C[0, 1]$ z metriko d prav tako eksponentna funkcija, ki pa ne leži v $\mathbb{R}[x]$. \square

- [10] Dokaz, da preslikava D ni zvezna.
- [10] Dokaz, da $(\mathbb{R}[x], d)$ ni poln metrični prostor.