

Rešitve 1. kolokvija iz Analize 1

- (1) **N** Vsako navzdol omejeno zaporedje ima realno stekališče.
- N** Vsaka navzgor omejena množica $A \subset \mathbb{R}$ ima največji element.
- P** Obstaja bijekcija $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$.
- N** Množica iracionalnih števil je števno neskončna.
- P** Množica racionalnih števil je povsod gosta v množici realnih števil.
- P** Za vsako naravno število n je $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$.
- N** Če je $z \in \mathbb{C}$ rešitev enačbe $z^3 = i$, je tudi \bar{z} rešitev te enačbe.
- P** Če naraščajoče zaporedje (a_n) zadošča pogoju $a_n \leq 2016$ za vsak indeks n , je konvergentno.
- P** Naj bo (a_n) realno zaporedje. Če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za vse $m, n > N$ velja $|a_m - a_n| < \epsilon$, je zaporedje (a_n) konvergentno.
- N** Naj bo število q racionalno, število r pa iracionalno. Število qr je potem iracionalno.

(2) (a) Naj bo

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} > \sqrt{2x-1}\}.$$

Določi tista izmed števil $\min A$, $\inf A$, $\max A$ in $\sup A$, ki obstajajo.

(b) Dokaži, da je število $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ deljivo z 9 za vsako naravno število n .

Rešitev: (a) Najprej rešimo neenačbo $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} > \sqrt{2x-1}$. Definirana je za $x \geq 2$. Ker sta obe strani pozitivni, jo lahko kvadriramo, da dobimo:

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} &> \sqrt{2x-1}, \\ x-1 + 2\sqrt{(x-1)(x-2)} + x-2 &> 2x-1, \\ \sqrt{(x-1)(x-2)} &> 1, \\ x^2 - 3x + 2 &> 1, \\ x^2 - 3x + 1 &> 0.\end{aligned}$$

Kvadratna funkcija na levi ima ničli $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Ko upoštevamo še definicijsko območje enačbe, dobimo, da je

$$A = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \infty\right).$$

Torej je $\inf A = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, medtem ko supremum, maksimum in minimum množice A ne obstajajo.

(b) Nalogo bomo rešili z indukcijo.

$n = 1$:

$$10^1 + 3 \cdot 4^3 + 5 = 207 = 9 \cdot 23.$$

$n \rightarrow n+1$:

Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k$. Od tod potem sledi:

$$\begin{aligned}10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+3} + 5 &= 9 \cdot 10^n + 10^n + 12 \cdot 4^{n+2} + 5, \\ &= 9 \cdot 10^n + 10^n + 9 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+2} + 5, \\ &= 9(10^n + 4^{n+2}) + 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5, \\ &= 9(10^n + 4^{n+2} + k).\end{aligned}$$

□

- [2] Definicijsko območje neenačbe.
- [4] Rešitev neenačbe.
- [4] Po točka za infimum, supremum, minimum in maksimum množice A .
- [2] Baza indukcije.
- [4] Uporaba indukcijske predpostavke.
- [4] Dokaz deljivosti.

(3) (a) Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$z^5 - z^4 + z - 1 = 0.$$

Rešitve zapiši v obliki: $z_k = x_k + iy_k$.

(b) Naj bo $z \in \mathbb{C}$ takšno število, da je število $\frac{iz-i}{z+1}$ realno. Pokaži, da je potem $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Rešitev: (a) Enačbo $z^5 - z^4 + z - 1 = 0$ lahko faktoriziramo v obliki

$$(z - 1)(z^4 + 1) = 0.$$

Tako dobimo prvo ničlo $z_4 = 1$, rešiti pa moramo še enačbo

$$z^4 = -1.$$

Pišimo $z = |z|e^{i\phi}$. Sledi

$$|z|^4 e^{i4\phi} = 1 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)}.$$

Vidimo, da je $|z| = 1$ in $\phi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ za $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Eksplicitno so to števila:

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(b) Po predpostavki je število $\frac{iz-i}{z+1}$ realno. To pomeni, da je

$$\frac{iz-i}{z+1} = \overline{\left(\frac{iz-i}{z+1}\right)}.$$

Od tod sledi:

$$\frac{i(z-1)}{z+1} = \frac{i(-\bar{z}+1)}{\bar{z}+1},$$

$$(z-1)(\bar{z}+1) = (-\bar{z}+1)(z+1),$$

$$z\bar{z} - \bar{z} + z - 1 = -\bar{z}z + z - \bar{z} + 1,$$

$$z\bar{z} = 1,$$

$$\bar{z} = \frac{1}{z}.$$

□

- [2] Faktorizacija.
- [4] Zapis enačbe v polarni obliki.
- [4] Po ena točka za vsako rešitev enačbe $z^4 = -1$.
- [4] Uporaba pogoja, da je dano število realno.
- [6] Izpeljava, da je $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

(4) Zaporedje (a_n) za $n \in \mathbb{N}_0$ ustreza rekurzivni formuli

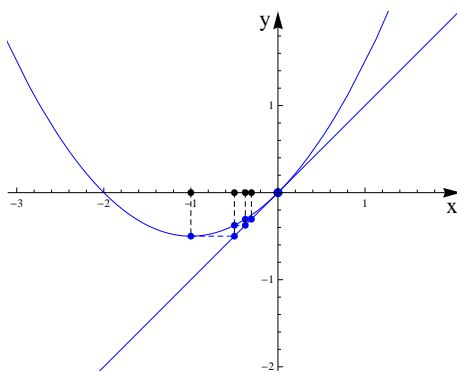
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2} + a_n.$$

- (a) Določi limito danega zaporedja, če je njegov začetni člen $a_0 = -1$. Vse korake natančno računsko utemelji.
 (b) S pomočjo ustrezne skice obravnavaj še konvergenco zaporedja za $a_0 = 0$ in $a_0 > 0$.

Rešitev: (a) Če je zaporedje (a_n) konvergentno, mora limitirati k številu a , ki reši enačbo:

$$\begin{aligned} a &= \frac{a^2}{2} + a, \\ a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Edina možna limita je torej $a = 0$. Da dobimo občutek, kaj se z zaporedjem dogaja, si pogledajmo diagram



Z grafa sklepamo, da bo pri začetni vrednosti $a_1 = -1$ zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno z 0.

Iz rekurzivne zveze sledi, da je

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2} + a_n \geq a_n,$$

kar pomeni, da je zaporedje naraščajoče. Pokažimo sedaj, da je zaporedje navzgor omejeno.

$$a_n \leq 0:$$

Denimo, da je $a_n \leq 0$ za nek n . Ker smo že dokazali, da je zaporedje naraščajoče, je torej $a_n \in [-1, 0]$. Sledi:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\leq 0, \\ \frac{a_n^2}{2} + a_n &\leq 0, \\ a_n(a_n + 2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Za $a_n \in [-1, 0]$ ta neenakost drži, kar pomeni, da je tudi $a_{n+1} \leq 0$.

Zaporedje (a_n) je torej naraščajoče in omejeno, od koder pa sledi, da je konvergentno in da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0.$$

(b) Če je $a_0 = 0$, je tudi $a_1 = 0$ in $a_n = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$. Če je $a_0 > 0$, pa že vemo, da zaporedje narašča. Če bi bilo omejeno, bi konvergiral. Ker je edina možna limita manjša od začetnega člena, to ne gre. Zaporedje je torej neomejeno in ne konvergira. \square

- [2] Izračun možnih limit.
- [3] Diagram.
- [3] Dokaz, da je zaporedje naraščajoče.
- [4] Dokaz, da je zaporedje omejeno.
- [2] Limita zaporedja.
- [2] Sklep, da je zaporedje konstantno, če je a_0 .
- [4] Dokaz, da zaporedje ne konvergira, če je $a_0 > 0$.

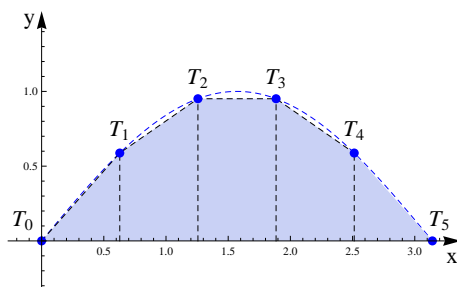
- (5) Za dano naravno število $n \geq 2$ so dane v ravnini \mathbb{R}^2 točke $T_k\left(\frac{k\pi}{n}, \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ za $k = 0, 1, \dots, n$. Označimo z S_n ploščino konveksnega mnogokotnika, ki ima dane točke za oglišča.

(a) Pokaži, da velja

$$S_n = \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

(b) Pokaži, da je zaporedje (S_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: (a) Dani mnogokotnik bomo razrezali na trapeze z navpičnimi osnovnicami.



Vsak od teh trapezov ima višino enako $\frac{\pi}{n}$, osnovnici pa sta dolgi $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ in $\sin\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)$. Prvi in zadnji trapez sta v resnici trikotnika. Če seštejemo ploščine teh dveh trikotnikov in preostalih trapezov, dobimo

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n} + \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n}) + \dots + \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} (\sin \frac{(n-2)\pi}{n} + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}) + \frac{1}{2} \frac{\pi}{n} \sin \frac{(n-1)\pi}{n}, \\ &= \frac{\pi}{n} (\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n}). \end{aligned}$$

Če pišemo $\omega = e^{i\frac{\pi}{n}}$, je vsota v oklepaju ravno imaginarni del vsote zaporedja

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = \frac{e^{i\pi} - 1}{\omega - 1} = \frac{2}{1 - \omega}.$$

Izraz na desni je enak

$$\frac{2}{1 - \omega} = \frac{2(1 - \bar{\omega})}{(1 - \omega)(1 - \bar{\omega})} = \frac{2(1 - e^{-i\frac{\pi}{n}})}{(1 - e^{i\frac{\pi}{n}})(1 - e^{-i\frac{\pi}{n}})} = \frac{2(1 - e^{-i\frac{\pi}{n}})}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}} + 1} = \frac{2(1 - \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n})}{2(1 - \cos \frac{\pi}{n})}.$$

Od tod sledi

$$\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 - \cos \frac{\pi}{n}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}.$$

Ploščina mnogokotnika je torej

$$S_n = \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

(b) Za izračun limite bomo uporabili oceno $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Pišimo

$$S_n = \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2n} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right).$$

Če dano oceno uporabimo na členu $\frac{\pi}{2n}$, ki leži na intervalu $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, dobimo

$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right) &< S_n < 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2n}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right), \\ 2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) &< S_n < 2. \end{aligned}$$

Zaporedje (S_n) torej leži med dvema zaporedjema, ki konvergirata k 2. Zato je tudi samo konvergentno in velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 2.$$

□

- [2] Skica.
- [4] Ploščina unije trapezov.
- [4] Prevedba na vsoto geometrijskega zaporedja.
- [4] Izpeljava formule za S_n .
- [4] Dokaz, da zaporedje konvergira.
- [2] Limita zaporedja.