

Analiza 1

Funkcije

(1) Za naslednja predpisa določi maksimalni definicijski območji:

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$,

(b) $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{5-x}\right)$.

(2) Za dana para funkcij f in g izračunaj predpisa in definicijski območji funkcij $f \circ g$ in $g \circ f$:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ in $g(x) = \sqrt{x}$,

(b) $f(x) = e^x$ in $g(x) = \ln x$.

(3) Naj bo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 0, \\ x & ; x \geq 0, \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; |x| > \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & ; |x| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Določi $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ in $g \circ g$ in nariši grafe.

(4) Dana je ravninska krivulja z enačbo $y|y| - 2y = x$. Ali je ta krivulja graf neke funkcije $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Kaj pa, če zožimo njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti?

(5) Naj bo $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$. Določi definicijsko območje funkcije f in pokaži, da je injektivna. Nato določi inverzno funkcijo. Podobno obravnavaj še funkcijo $g(x) = \ln\left(\frac{x-3}{2}\right)$.

(6) Nariši grafe funkcij:

(a) $\sin(\arcsin x)$ in $\arcsin(\sin x)$.

(b) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ in $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

(7) Dokaži enakost

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1 - x^2} & ; x \in [0, 1], \\ \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2} & ; x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

(8) Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ naj bo $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

(a) Izračunaj definicijska območja D_{T_n} .

(b) Dokaži, da je T_n polinom stopnje n .

(9) Hiperbolični sinus in kosinus sta definirana s predpisoma $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ in $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) Dokaži, da je sh injektivna na $\mathbb{R}$ in izračunaj njeno inverzno funkcijo.

(b) Dokaži, da je ch injektivna na $[0, \infty)$ in izračunaj inverzno funkcijo te zožitve.

(c) Izpelji adicijske izreke za funkciji sh in ch .

(10) Dokaži, da obstaja natanko ena neničelna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja:

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

za vse $x, y \in \mathbb{R}$.