

Analiza 1

Zveznost

- (1) Po definiciji preveri, da je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ zvezna v točkah $a = 0$ in $a = 2$.
- (2) Določi konstanto k tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) & ; x \neq 0, \\ k & ; x = 0 \end{cases}$$

zvezna na $\mathbb{R}$, če je mogoče.

- (3) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & ; x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b & ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & ; x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija f zvezna na $\mathbb{R}$.

- (4) Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x & ; x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0 & ; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Določi vse točke, v katerih je f zvezna.

- (5) Funkcija f je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ \frac{1}{n} & ; x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{m}{n}, \text{ kjer sta si } m \in \mathbb{Z} \text{ in } n \in \mathbb{N} \text{ tuji.} \end{cases}$$

(a) Dokaži, da f ni zvezna v točkah iz $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

(b) Dokaži, da je f zvezna na $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$.

- (6) Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1},$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}, n \in \mathbb{N},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1},$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}.$

- (7) Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x}, a > 0,$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}.$

(8) Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}),$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x + \sqrt[3]{1-x^3}),$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln \operatorname{ch} x),$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$

(9) Denimo, da obstajata limiti $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ in $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ ali $a = \pm\infty$. Dokaži, da potem velja

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

(10) Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}},$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1 - \cos x}},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x},$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2 + x + 3}.$

(11) Dokaži, da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ enakomerno zvezna na $[0, \infty)$.

(12) Naj bo $a > 0$. Obravnavaj enakomerno zveznost funkcije $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ na intervalih $(0, \infty)$, $(0, a)$ in (a, ∞) .

(13) Dokaži, da ima enačba $x2^x = 1$ rešitev na intervalu $[0, 1]$. Določi jo na dve decimalki natančno.

(14) Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ zvezna funkcija. Pokaži, da ima negibno točko.

(15) Dokaži, da na ekvatorju obstajata diametralno nasprotni točki z isto temperaturo. V analogi privzemimo, da ima ekvator obliko krožnice in da je temperatura zvezna funkcija.