

Analiza 1

Odvod

(1) Izračunaj odvode funkcij:

(a) $f(x) = e^{-\cos x}$,

(b) $f(x) = x^n \ln \left(\frac{x}{1 + \sqrt{x}} \right)$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) $f(x) = \frac{2^{3x}}{3^{x^2}}$,

(d) $f(x) = \frac{1 - \ln^2 x}{\ln 3 + \ln^3 x}$,

(e) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$,

(f) $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

(2) (a) Izračunaj odvode funkcij sh, ch in th.

(b) Izračunaj odvode funkcije arsh, arch in arth na dva načina.

(3) Poišči globalne ekstreme funkcije $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ na intervalu $[0, 2]$.

(4) V enakokrak trikotnik z osnovnico c in višino h včrtaj pravokotnik, ki ima eno stranico vzporedno osnovnici in ima največjo možno ploščino.

(5) Cena enote površine valjastega dela silosa je dvakrat nižja od cene enote površine sferne kupole. Pri danem volumnu določi dimenzije najcenejšega silosa.

(6) Naj bosta $a, p > 0$. Na paraboli $y^2 = 2px$ poišči točko, ki je najbližja točki $(a, 0)$.

(7) Kolikšna je dolžina najdaljše palice, ki jo lahko nesemo vzporedno tlem skozi hodnik s pravokotnim ovinkom, če je širina hodnika pred ovinkom enaka a , po ovinku pa b .

(8) Poišči enačbo tiste tangente na graf funkcije $f(x) = -x^2 + x + 2$, ki je vzporedna premici $y = 3 - 3x$.

(9) Poišči enačbo normale na graf funkcije $f(x) = \sqrt{\ln x}$ v $x = e$.

(10) Pod kakšnim kotom se sekata grafa funkcij $f(x) = \sin x$ in $g(x) = \cos x$.

(11) Zapiši enačbo tangente na elipso $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ v točki $(1, b)$, kjer je $b > 0$.

(12) Dokaži, da je dolžina odseka tangente na astroido med koordinatnima osema konstantna. Astroida je podana z implicitno enačbo $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ za nek $a > 0$.

(13) Z uporabo diferenciala približno izračunaj naslednji vrednosti:

(a) $e^{0.2}$,

(b) $\sqrt{0.97}$.

- (14) Izračunaj njuna odvoda, nato pa v isti koordinatni sistem skiciraj grafa funkcij:

$$f(x) = \arctg x, \quad g(x) = \frac{1}{2} \arctg \frac{2x}{1-x^2}.$$

- (15) Dokaži Leibnizovo pravilo za višje odvode produkta

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

S pomočjo te formule izračunaj $(x \cos(2x))^{(100)}$.

- (16) Naj bo funkcija f podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 1, \\ ax + b & ; 0 \leq x < 1, \\ 2 \arctg x + c & ; x < 0. \end{cases}$$

- (a) Določi konstante a , b in c tako, da bo f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.
- (b) Izračunaj zalogo vrednosti funkcije f .
- (c) Pokaži, da obstaja inverzna funkcija f^{-1} .

- (17) Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Dokaži, da je funkcija f odvedljiva, a ni zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

- (18) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna v 0, odvedljiva v 0, za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ pa velja

$$f(x+y) = 2f(x)f(y).$$

Dokaži, da je f zvezno odvedljiva na $\mathbb{R}$.

- (19) Dokaži, da za vsak $a > 0$ velja $\frac{1}{a+1} < \ln(1 + \frac{1}{a}) < \frac{1}{a}$.
- (20) Dokaži, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|$. Ali je funkcija $\arctg$ enakomerno zvezna na $\mathbb{R}$?
- (21) Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu I in naj bo njen odvod omejena funkcija. Dokaži, da je potem f enakomerno zvezna na I .
- (22) Dana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $f(x) = 3x + \sin(2x)$.
 - (a) Pokaži, da je f bijekcija in da sta tako f kot f^{-1} enakomerno zvezni na $\mathbb{R}$.
 - (b) Ali v splošnem velja, da je inverz bijektivne, enakomerno zvezne funkcije enakomerno zvezen?
- (23) Naj bo f $(n-1)$ -krat zvezno odvedljiva na $[a, b]$ in naj obstaja n -ti odvod funkcije f na (a, b) . Dokaži: če za točke $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ velja $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$, potem je $f^{(n)}(c) = 0$ za nek $c \in (a, b)$.

(24) Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{\sin(\pi x)},$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right),$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln(1 - e^{-x^2})},$
- (d) $\lim_{x \downarrow 0} x^x.$

(25) Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x},$
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}},$
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1},$
- (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - \sin x}{3x + \cos x}.$

(26) Izračunaj linearni asimptoti funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + x}.$

(27) Skiciraj grafe funkcij:

- (a) $f(x) = \sin x + \sin^2 x,$
- (b) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}},$
- (c) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x},$
- (d) $f(x) = (2x^2 - 17) \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}.$

(28) Skiciraj krivulji, ki sta podani v parametrični obliki:

- (a) $x(t) = t^2 - 1, y(t) = t^3 - t$ za $t \in \mathbb{R},$
- (b) $x(t) = \cos^2 t, y(t) = \sin^2 t$ za $t \in [0, \pi].$

(29) Skiciraj krivuljo, ki je podana v parametrični obliki $x(t) = \frac{1}{\sin t}, y(t) = \cos t$ za $t \in (0, \pi).$ Nato izračunaj enačbo tangente na krivuljo v točki $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}).$

(30) Pokaži, da predpis v parametrični obliki $x(t) = 2 \cos t - \sin t$ in $y(t) = 2 \cos t + \sin t$ za $t \in [0, 2\pi]$ določa elipso. V okolici točke $(2, 2)$ izrazi elipso v obliki $y = y(x)$ in izračunaj $y''(x)$ v tej točki.

(31) Descartov list je implicitno podan z enačbo $x^3 - 3axy + y^3 = 0$ za nek $a > 0.$ Z uvedbo parametra $t = \frac{y}{x}$ ga zapiši v parametrični obliki in nato še skiciraj.

(32) Zapiši enačbo krivulje, ki jo opiše točka na obodu kroga s polmerom $r,$ ki se kotali po zunanji strani kroga s polmerom $R \geq r.$

(33) Naj bosta $a, b > 0$. Skiciraj krivulje, ki so podane v polarnih koordinatah:

(a) $r(\phi) = a(1 + \cos \phi)$ za $\phi \in [0, 2\pi]$,

(b) $r(\phi) = a \cos(3\phi)$ za $\phi \in [0, 2\pi]$,

(c) $r(\phi) = a + b\phi$ za $\phi \in [0, \infty)$,

(d) $r(\phi) = \frac{a}{\phi}$ za $\phi \in (0, \infty)$.

(34) Lemniskata je podana v implicitni obliki z enačbo $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ za nek $a > 0$. Izrazi jo v polarnih koordinatah in jo nato skiciraj.

(35) Dana je premica p in točka A , ki ne leži na p . Označimo s C pravokotno projekcijo A na p . Za poljubno točko $B \in p$ naj bosta M_B in N_B točki na premici AB , ki zadoščata pogoju $|M_B B| = |N_B B| = |BC|$. Množica vseh teh točk M_B in N_B tvori krivuljo, ki ji rečemo strofoida. Določi enačbo strofoide in jo nato skiciraj.