

23.1
• Ko aproksimiramo odvode z diferenciali, se skritična napaka prenese v lokalno.

• Naj L_δ označuje diskretno aproksimacijo operatorja L . Lokalna napaka je

$$\tau(x) := (Lu)(x) - (L_\delta u)(x), \quad x \in D.$$

• Včasih izražamo v kartezinskih koordinatah ni najbolj primerna, recimo Poissonova enačba na kolobargu:

- Laplaceov operator zapisemo v polarnih koordinatah

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = f(r, \theta),$$

$$0 < \rho_0 < r < \rho_1, \quad 0 < \theta \leq 2\pi.$$

- Denimo, da je vrednost na robovih

$r = \rho_0$ in $r = \rho_1$ zmanjšana in izberemo

$$r_j = \rho_0 + j \delta_r, \quad j = 0, 1, \dots, J+1, \quad \delta_r := \frac{\rho_1 - \rho_0}{J+1},$$

$$\theta_k = k \delta\theta, \quad k = 0, 1, \dots, K+1, \quad \delta\theta = \frac{2\pi}{K+1}$$

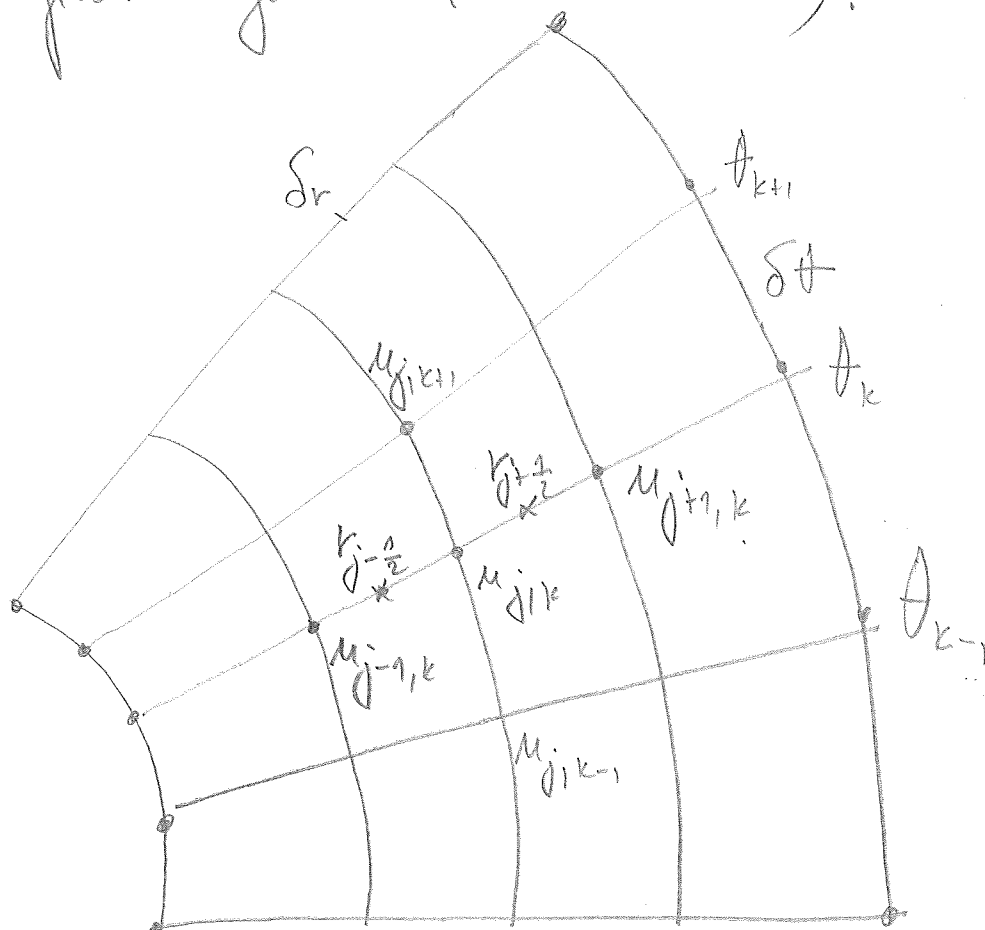
- Označimo $u_{jk} \approx u(r_j, \theta_k)$,

$$r_{j \pm 1/2} : r_j \pm \frac{1}{2} \Delta r \quad \text{in} \quad f_{jk} = f(r_j, \theta_k)$$

- Aproximacija se stran od roba glasi

$$\frac{1}{r_j \Delta r^2} \left(r_{j+\frac{1}{2}} (-u_{j+1,k} + u_{j,k}) + r_{j-\frac{1}{2}} (u_{j,k} - u_{j-1,k}) \right) + \frac{1}{r_j^2 \Delta \theta^2} (-u_{j,k-1} + 2u_{j,k} - u_{j,k+1}) = f_{jk}$$

- Napaka je $\mathcal{O}(\Delta r^2 + \Delta \theta^2)$.



• Zanimljivo samo izbrali zaradi posledične simetrije! (na robah?)

Numerično reševanje enačb eliptičnega tipa

- Eliptične PDE lahko nastopajo samostojno (problemi ravnotežja) ali pa kot podproblemi (toplotna ali valovna enačba)

- Isčemo rešitev PDE

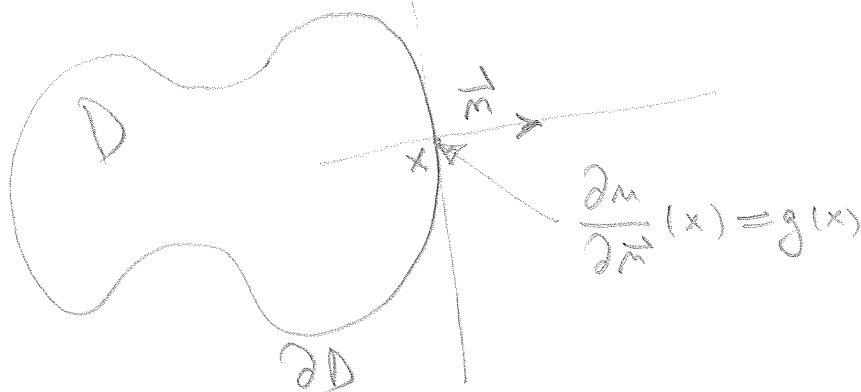
$$Lu = 0 \quad \text{na } D,$$

$$Ru = 0 \quad \text{na } \partial D,$$

kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

- Robni pogoji lahko vsebujejo tudi odvode (ponavadi normalni odvod)
- Enačba reda $2m$ zahteva m neodvisnih robnih pogojev!
- Najbolj znani robni pogoji za enačbe drugega reda so:
 - Dirichletov pogoj: podane so vrednosti rešitve u na ∂D , $u(x) = g(x)$, $x \in \partial D$.

- von Neumann pogoji : znana je vrednost odhoda u v smeri (zunanj) normalne na ∂D , $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = g(x)$, $x \in \partial D$



Rešitev je določena le do konstante!

- Mišani pogoji : kombinacija Dirichletovega in von Neumannovega pogoja

$$u(x) + \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x) = g(x), \quad x \in \partial D$$

- Tip robnega pogoja vpliva tudi na način reševanja PDE
- Za točke diskretizacije, pri katerih se diskretna aproksimacija dotakne roba, se shema spreminja glede na tip robnega pogoja.

Diskretizacija Poissonove enačbe na pravokotniku

26

- Rešujemo
$$\left. \begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{na } D \\ u &= g & \text{na } \partial D \end{aligned} \right\} \text{Dirichletov problem}$$
- $D = (0, a) \times (0, b)$, $a, b > 0$
- Analiza je preprostejša kot za primer mešanih robnih pogojev, a konceptualno podobna.
- Predpostavimo, da sta f in g dovolj "pohlebi", da ji eksistenca analitične (točne) rešitve zagotovljena (gladkost funkcij f in g).
- Laplaceov operator v Poissonovi enačbi je poseben primer operatorja
$$Lu := -\frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + q(x, y) u$$

• Za pozitivnost zahtevamo

$$p_1(x, y) \geq c_1 > 0, \quad p_2(x, y) \geq c_2 > 0$$

$$q(x, y) \geq 0 \quad \text{za } (x, y) \in D$$

• Za posplošeni tip se uporabljajo podobni preizkusi kot za klasično Poissonovo enačbo.

• Za diskretizacijo Poissonove enačbe bomo uporabili diferenčno metodo. Območje D razdelimo

o premicami

$$x_j = j \delta x, \quad j = 0, 1, \dots, J+1,$$

$$y_k = k \delta y, \quad k = 0, 1, \dots, K+1.$$

Dolimo $J+1$ intervalov v $[0, a]$ in $K+1$ podintervalov v $[0, b]$ ter

$$\delta x = a / (J+1), \quad \delta y = b / (K+1)$$

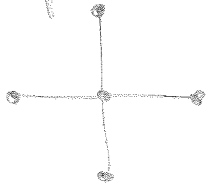
Diskretna mrežna točka je

$$D_\delta = \{ (x_j, y_k); \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad k = 1, 2, \dots, K \},$$

diskretne robne točke

$$\partial D_\delta = \{ (x_j, y_k); \quad k = 0, K+1, \quad j = 1, 2, \dots, J; \quad j = 0, J+1, \quad k = 1, 2, \dots, K \}.$$

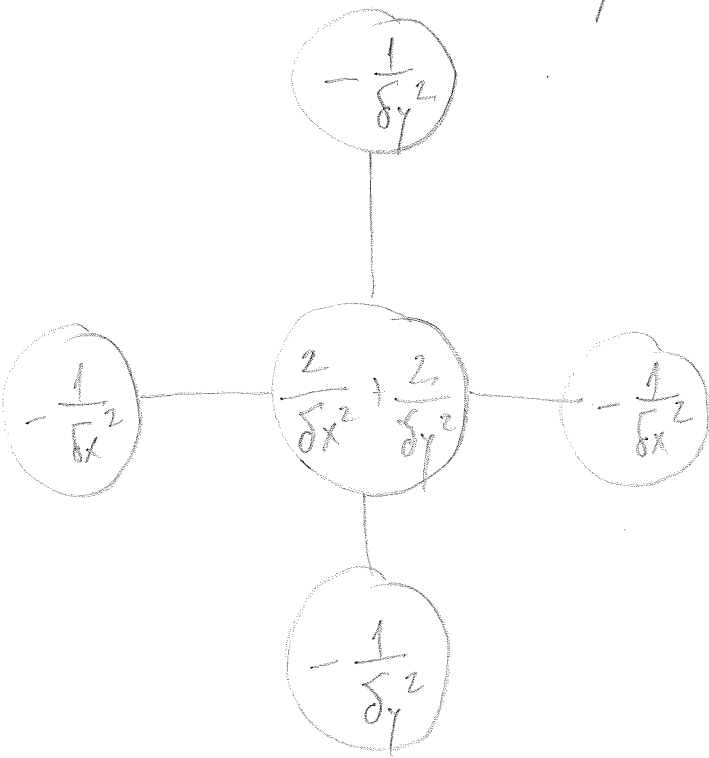
Uporabimo pettočkano aproksimacijo



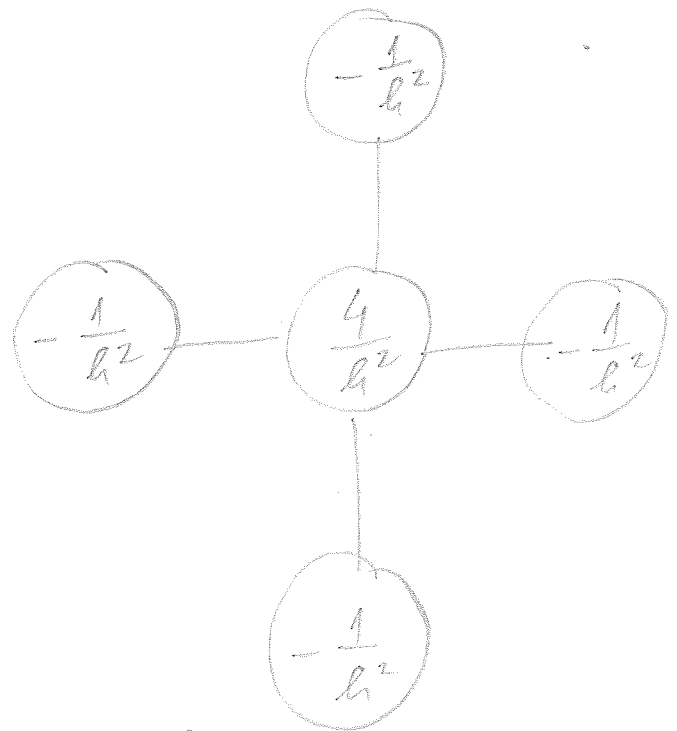
in vstanimo $u_{jk} \approx u(x_j, y_k)$:

$$-\Delta_\delta u(x_j, y_k) \approx -\Delta_\delta u_{jk}, \text{ kjer } j$$

$$-\Delta_\delta u_{jk} := \frac{-u_{j-1,k} + 2u_{jk} - u_{j+1,k}}{\delta x^2} + \frac{-u_{j,k-1} + 2u_{jk} - u_{j,k+1}}{\delta y^2}$$



Shema za $\delta x \neq \delta y$.



Shema za $\delta x = \delta y$.

- Za vsako točko $(x_j, y_k) \in D_\delta$ zapišemo enačbo, kjer je "pettočkoma molekula" določena roba, upoštevamo robne pogoje.

Poissonova enačba se v diskretni obliki glasi

$$\begin{aligned} \textcircled{*} \quad -\Delta_\delta u_{jk} &= f_{jk}, \quad (x_j, y_k) \in D_\delta, \\ u_{jk} &= g_{jk}, \quad (x_j, y_k) \in \partial D_\delta \end{aligned}$$

- Dobili smo sistem $J \cdot K$ linearnih enačb za neznane numerične približke $u_{jk} \approx u(x_j, y_k)$.
 - Če numerično rešitev označimo z u_δ , lahko pišemo
- $$u_\delta(x_j, y_k) = u_{jk}, \quad (x_j, y_k) \in D_\delta \cup \partial D_\delta.$$

Poglavitna ugotovitev bo, da ima sistem $\textcircled{*}$ vedno enolično rešitev. za majhne δ_x, δ_y

To pomeni, da zagotavlja dejstvo, da ima problem analitičnega rešitve $\stackrel{?}{\Rightarrow}$ num. rešitev

Pomembno vlogo ima naslednji izrek: (30)

Izek (Diskretni maksimalni princip).

Naj v , ki je definirana na $D_\delta \cup \partial D_\delta$,
reša

$$\Delta_\delta v(x, y) \geq 0, \quad (x, y) \in D_\delta.$$

Potem je

$$\max_{(x, y) \in D_\delta} v(x, y) \leq \max_{(x, y) \in \partial D_\delta} v(x, y).$$

Podobno reša, če

$$\Delta_\delta v(x, y) \leq 0, \quad (x, y) \in D_\delta,$$

potem sledi

$$\min_{(x, y) \in D_\delta} v(x, y) \geq \min_{(x, y) \in \partial D_\delta} v(x, y).$$

Dokaz: Dokazali bomo le prvi del trditve
(o maximum).

Potrebujemo naslednje oznake:

$$\delta^2 = \frac{1}{2\left(\frac{1}{\delta x^2} + \frac{1}{\delta y^2}\right)} = \frac{\delta x^2 \delta y^2}{2(\delta x^2 + \delta y^2)} \quad \text{in}$$

$$\theta_x = \frac{\delta^2}{\delta x^2} = \frac{\delta y^2}{2(\delta x^2 + \delta y^2)}$$

$$\theta_y = \frac{\delta^2}{\delta y^2} = \frac{\delta x^2}{2(\delta x^2 + \delta y^2)}$$

Naj bo $(x_j, y_k) \in D_\delta$ in pišimo $v_{jk} = v(x_j, y_k)$.

Po predpostavki je

$$\frac{v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k}}{\delta x^2} + \frac{v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1}}{\delta y^2} \geq 0$$

Od tod z množenjem z δ^2 dobimo:

$$(v_{j-1,k} - 2v_{j,k} + v_{j+1,k})\theta_x + (v_{j,k-1} - 2v_{j,k} + v_{j,k+1})\theta_y \geq 0$$

Ker je $\theta_x + \theta_y = \frac{1}{2}$, sledi

$$v_{j,k} \leq \theta_x (v_{j-1,k} + v_{j+1,k}) + \theta_y (v_{j,k-1} + v_{j,k+1})$$

Derimo, da je $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_k) \in D_\delta$ točka, v kateri v doseže maksimum $\tilde{v}_{jk}$. Torej

$$\tilde{v}_{jk} = \max_{(x,y) \in D_\delta} v(x,y).$$

$$|z| \quad v_{jk} \leq \theta_x (v_{j-1,k} + v_{j+1,k}) + \theta_y (v_{j,k-1} + v_{j,k+1}) \quad (32)$$

sklepamo

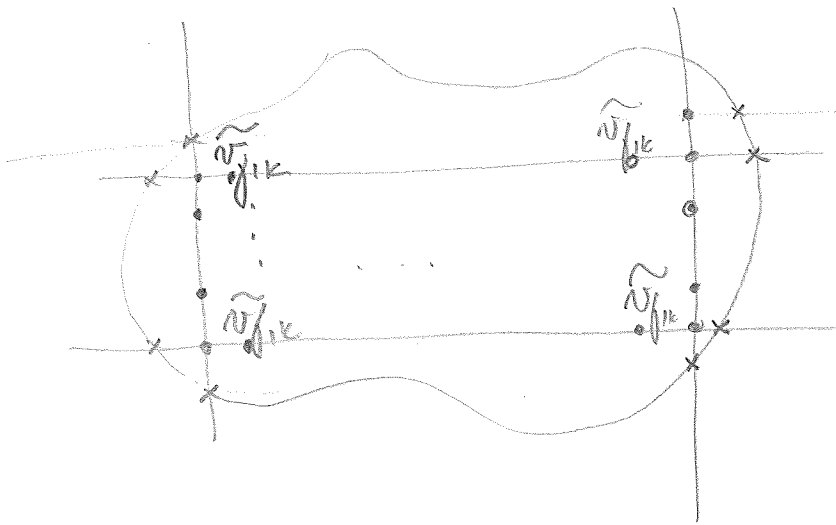
$$\tilde{v}_{jik} \leq \theta_x (v_{j-1,k} + \tilde{v}_{j+1,k}) + \theta_y (v_{j,k-1} + v_{j,k+1})$$

$$\leq 2(\theta_x + \theta_y) \tilde{v}_{jik} = \tilde{v}_{jk}$$

Če so vsi stoji diskretni točke $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_k)$ v D_δ . V tem primeru mora biti

$$\underline{v_{j-1,k} = v_{j+1,k} = v_{j,k-1} = v_{j,k+1} = \tilde{v}_{jik} .}$$

Tako lahko nadaljujemo do roba



Denimo, da je $\tilde{v}_{jik} > \max_{(x,y) \in \partial D_\delta} v(x,y)$.

Ko se naj v eni točki dotaknemo roba, dobimo

$$\tilde{v}_{jk} < 2(\theta_x + \theta_y) \tilde{v}_{jk} = \tilde{v}_{jk} ,$$

kar je protisloje.

Izrek: Naj bo v definirano na $D_\delta \cup \partial D_\delta$. Potem je

$$\max_{(x,y) \in D_\delta} |v(x,y)| \leq \max_{(x,y) \in \partial D_\delta} |v(x,y)|$$

$$+ \frac{1}{2} \min(a^2, b^2) \max_{(x,y) \in D_\delta} |\Delta_\delta v(x,y)|.$$

Dokaz: Naj bo $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2$, $(x,y) \in D$ primerjalna funkcija. Očitno je monotono naraščajoča v smislu x in ji $0 \leq \phi(x) \leq \frac{1}{2}a^2$.

Velja:

$$\Delta_\delta \phi(x,y) = \frac{1}{2} \frac{(x-\delta x)^2 - 2x + (x+\delta x)^2}{\delta x^2} = 1$$

Označimo $v_\pm := \pm v + N\phi$, kjer je

$$N := \max_{(x,y) \in D_\delta} |\Delta_\delta v(x,y)|.$$

Izberimo $(x,y) \in D_\delta$. Diskretni Laplaceov operator Δ_δ je linearen, zato je

$$\Delta_\delta v_\pm(x,y) = \pm \Delta_\delta v(x,y) + N \geq 0.$$

Pod prejšnjem izreku je torej

(34)

$$\max_{(x,y) \in D\delta} v_{\pm}(x,y) \leq \max_{(x,y) \in \partial D\delta} v_{\pm}(x,y).$$

Izberimo poljubno točko $(x,y) \in D\delta$. Torej je

$$\pm v(x,y) \leq \pm N(x,y) + N\phi(x,y) = v_{\pm}(x,y)$$

$$\leq \max_{(x,y) \in \partial D\delta} v_{\pm}(x,y) = \max_{(x,y) \in \partial D\delta} (\pm N(x,y) + N\phi(x,y))$$

$$\leq \max_{(x,y) \in \partial D\delta} (\pm N(x,y)) + \frac{1}{2} a^2 N$$

$$\leq \max_{(x,y) \in \partial D\delta} |v(x,y)| + \frac{1}{2} a^2 N.$$

Ker zgoraj neenakost velja za $\pm v$, velja

tudi za $|v|$:

$$|v(x,y)| \leq \max_{(x,y) \in \partial D\delta} |v(x,y)| + \frac{1}{2} a^2 N$$

Če maksimum vzamemo po vseh točkah $(x,y) \in D\delta$,
dobljamo

$$\max_{(x,y) \in D\delta} |v(x,y)| \leq \max_{(x,y) \in \partial D\delta} |v(x,y)| + \frac{1}{2} a^2 N.$$

Podobno oceno dolimo na v y smeri,
 le a^2 se zamenja z b^2 . Torej je

(35)

$$\max_{(x,y) \in D\delta} |v(x,y)| \leq \max_{(x,y) \in \partial D\delta} |v(x,y)|$$

$$+ \frac{1}{2} \min(a^2, b^2) \max_{(x,y) \in D\delta} |\Delta\delta v(x,y)|$$

Slednji izrek je pomemben pri oceni globalne napake.

Denimo, da μ ^u μ itev Γ obstaja in sta f in g dovolj gladki.

Označimo e e globalno napako

$$e(x,y) := \mu_\delta(x,y) - \mu(x,y), \quad (x,y) \in D\delta \cup \partial D\delta$$

Zaradi Dirichletovega robnega pogoja je

$$e(x,y) = 0 \quad \text{za } (x,y) \in \partial D\delta.$$

Kot vemo, je lokalna napaka T definirana z

$$\begin{aligned} \tau(x, y) &= (-\Delta u - f)(x, y) - (-\Delta_\delta u - f)(x, y) \quad (36) \\ &= (-\Delta + \Delta_\delta)u(x, y) = \mathcal{O}(\delta x^2 + \delta y^2), \quad (x, y) \in D_\delta. \end{aligned}$$

Za globalno napako e reja

$$\begin{aligned} -\Delta_\delta e(x, y) &= -\Delta_\delta (u_\delta - u)(x, y) \\ &= \Delta_\delta u_\delta(x, y) + f(x, y) = \overbrace{f(x, y)}^{-\Delta u(x, y)} + \Delta u(x, y) + (\Delta_\delta - \Delta)u(x, y) \\ &= \tau(x, y) \end{aligned}$$

Torej ji $-\Delta_\delta e(x, y) = \tau(x, y)$.

To pomeni, da ji e rešitev diskretne Poissonove enačbe, hi ima za desno stran ~~isto~~ funkcijo τ .

V prejšnji izreč postavimo e namesto u in dobimo naslednji rezultat.

17. lek: Naj bo točna rešitev Poissonove (37)
 enačbe naj stikrikrat zvezno odvedljiva
 funkcija. Za globalno napako $e = u_\delta - u$
 velja ocena

$$\max_{(x,y) \in D_\delta} |e(x,y)| \leq \underbrace{\max_{(x,y) \in \partial D_\delta} |e(x,y)|}_{\text{napaka na robu}} + \underbrace{\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2}}_{\text{lokalna napaka}.$$

Na robu je napaka enajša 7 osnovno
 zaokrožitveno napako enaka 0, zato
je globalna napaka enaka kot lokalna
napaka.

Če točna rešitev obstaja, potem po pripravi
 izračun obstaja tudi rešitev diskretnih naloge
 za dovolj majhna δ_x in δ_y .