

Osnovne iteracijske metode za

54

Poissonova enačba

- Kadar je matrika sistema linearnih enačb $Ax = b$ prevelika, direktni metod (ki temelji na Gaussovih eliminacijah polne matrike) ne moremo uporabiti.
- Časovna zahtevnost je $O(n^3)$, kjer je n velikost matrike, kar je za $n \gg 1$ preveč.
- Zato iščemo n k iteracijskemu načinu reševanja (zanemajati želimo časovno zahtevnost).
- Ideja: Matriko A zapišemo kot $A = M - N$ ter računamo zaporedje
$$(*) \quad Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, \dots$$
Tu temu je pomembno, da je M obrnjiva ter da lahko sistem $(*)$ rešimo / računamo v času $O(n^2)$.

O konvergenci konstruiranega zaporedja
odloča spektralni radij matrike
 $T := M^{-1}N$.

(55)

Izrek: Iteracija $u^{(r+1)} = Tu^{(r)} + c$, $T = M^{-1}N$,
 $c = M^{-1}b$, konvergira za vsak začetni približek
 $u^{(0)}$ natanko tedaj, ko je $\rho(T) < 1$.

Dokaz: Naj bo u rešitev sistema $Au = b$.

Potem je $Au = b \Leftrightarrow (M - N)u = b \Leftrightarrow$
 $Mu = Nu + b \Leftrightarrow u = M^{-1}Nu + M^{-1}b \Leftrightarrow$
 $u = Tu + c$ (konstantna iteracija
s sistemom $Au = b$).

Naj bo $e^{(k)} = u^{(k)} - u$, $k = 0, 1, \dots$

Dokazati želimo, da je $\lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k)} = 0 \Leftrightarrow$

$\rho(T) < 1$.

$(\Leftarrow)$ Naj bo $\rho(T) < 1$. Potem je $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$

(spomnite se definicije na Jordanovo formo T).

Ker je $e^{(k+1)} = u^{(k+1)} - u = Tu^{(k)} + c - Tu - c$

$= T(u^{(k)} - u) = Te^{(k)}$, je $e^{(k+1)} = T^{k+1}e^{(0)}$, $k = 0, 1, \dots$

$$\text{Zat } j \quad \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k e^{(0)} =$$

(56)

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} T^k \right) e^{(0)} = 0.$$

$\Rightarrow$) Dokazujemo - protislaven. Recimo, da je $\rho(T) \geq 1$. Potem obstaja vsaj ena lastna vrednost $\lambda(T)$, $|\lambda| \geq 1$. Naj bo $e^{(0)}$ njej pripadajoči lastni vektor.

Potem je $T e^{(0)} = \lambda e^{(0)}$ oz. splohneje, $e^{(k)} = \lambda^k e^{(0)}$. Očitno $e^{(k)}$ ne more konvergirati k 0, ko gre $k \rightarrow \infty$, saj je $|\lambda| \geq 1$ in $e^{(0)} \neq 0$.

Pomembna nova učinkovitosti metode je hitrost konvergence

$$R(T) := -\log \rho(T).$$

Ta pove, koliko iteracij v najslabšem primeru potrebujemo, da je naša napaka $u^{(k)}$ - u za faktor 10^{-m} manjša kot ne začetna. Veja $k \geq \left\lceil \frac{m}{R(T)} \right\rceil$.

Jacobijeva iteracija

(57)

- Pri tej iteraciji matriko A razdelimo tako, da je računanje M^{-1} (ali numerično ekvivalentno reševanje sistema $Mx=y$; inverta namreč praktično nikoli numerično ne računamo!) kar se da enostavno.

- Ena od takih izbir je

$$A = M - N = \text{diag } A - (\text{diag } A - A)$$

- V primeru reševanja Poissonove enačbe dobimo $M = I$, $N = H + V =: T_J$,
 T_J je iteracijska matrika $T_J = M^{-1}N = N$.

- Iteracija je preprosta

$$u^{(r+1)} = (H + V)u^{(r)} + b = T_J u^{(r)} + b$$

- Iz Gerschgorinovih izrekov sledi

$$\rho(T_J) \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m |(H+V)_{ij}| \leq 2(\theta_x + \theta_y) = 1$$

• Če bi kakšna lastna vrednost bila po

absolutno mednodi T_j bi morali (58)
 za vsi matrike $H+V$ večji, da se elementi
 sestepijo v 1, kar ni res.

Konvergenca je zagotovljena, zanimala pa
 nas definirana hitrost konvergenca.

Oglejmo si $Aw = (I - T_j)w = \mu w$
 Matrika T_j ima iste lastne vektore
 kot A , lastne vrednosti pa so

$$\mu_{pq} = 1 - \lambda_{pq}, \quad \lambda_{pq} \in \sigma(A)$$

Najprej pokažimo, da je $\sigma(T_j)$
 simetričen glede na izhodnice:

$$\begin{aligned} \mu_{pq} + \mu_{j+1-p, k+1-q} &= 2 - (\lambda_{pq} \\ &+ \lambda_{j+1-p, k+1-q}) \\ &= 2 - 4(\theta_x + \theta_y) + 2\theta_x \cos\left(\frac{p\pi}{j+1}\right) + 2\theta_y \cos\frac{2\pi}{k+1} \\ &+ 2\theta_x \cos\left(\frac{\pi(j+1-p)}{j+1}\right) + 2\theta_y \cos\left(\frac{\pi(k+1-q)}{k+1}\right) \end{aligned}$$

$$= 2 - 4(\theta_x + \theta_y) = 0$$

Vejata se oceni $\mu_{p2} = 1 - \lambda_{p2} \leq 1 - \lambda_{11}$
 $= \mu_{11} < 1$

in

$$\mu_{11} = 1 - \lambda_{11} = 1 - \delta^2 \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \delta^2 \delta(\delta x^2 + \delta y^2).$$

Od tod sledi izrek

Izrek: Lastne vrednosti Jacobijeve iteracijske matrice pri reševanju Poissonove enačbe nastopajo v $\pm$ parih in $\sigma(T_J) \subset (-1, 1)$.
 Za spektralni radij velja

$$\rho(T_J) = \mu_{11} = 1 - \delta^2 \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \delta^2 \delta(\delta x^2 + \delta y^2).$$

Pomba: Ker je $\delta^2 = \frac{\delta x^2 \delta y^2}{2(\delta x^2 + \delta y^2)}$, je konvergenca
 7 manjšanjem kvara δx in δy ne pričakovana!

Gausso-Seidlova iteracija

(60)

- Ideja je, da Jacobijeva iteracija pohitrimo
- Splošna Jacobijeva iteracija za A se glasi: $A = D - (-L - U)$,
kjer sta L in U spodnji, oziroma
zgornji trikotniški matriki A
- Iteracija se glasi

$$D u^{(k+1)} = -(L+U) u^{(k)} + b,$$

Oziroma po komponentah

$$u_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} u_j^{(k)} \right), \quad i=1,2,\dots,n$$

- Opazimo, da bi pri računanju $u_i^{(k+1)}$ lahko uporabili že izračunane
 $u_j^{(k+1)}$ za $j < i$.

- Torej lahko postopek "izboljšamo": (61)

$$u_i^{(r+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} u_j^{(r+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} u_j^{(r)} \right)$$

- V matričnem zapisu:

$$u^{(r+1)} = (D + L)^{-1} (b - U u^{(r)})$$

$$\underline{T_{GS} = -(D + L)^{-1} U} \quad \text{— iteracijska}$$

matrika Gauss-Seidlove iteracije

• V primeru reševanja Poissonove enačbe dobimo

$$M = I - (F + B), \quad N = F^T + B^T$$

• Iteracija se glasi:

$$u_{fjk}^{(r+1)} = \theta_x u_{f-1,k}^{(r+1)} + \theta_y u_{f,k-1}^{(r+1)} + \theta_x u_{f+1,k}^{(r)} + \theta_y u_{f,k+1}^{(r)} + b_{fk}$$

- V splošnem je težko poiščati lastne vrednosti iterativne matrice za Poiss. problem (62)
- $$T_{GS} = (I - (F+B))^{-1} (F^T + B^T)$$

- Ključna je struktura matrice, ki jo preučujemo.

- Brez daha za zapisišimo glavne rezultate:

$$\begin{aligned} \rho(T_{GS}) &= \rho(T_G)^2 = (1 - \lambda_{11})^2 \\ &= 1 - 2\lambda_{11} + \lambda_{11}^2 \\ &= 1 - 2\delta^2 \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \delta^2 (\delta x^2 + \delta y^2) \end{aligned}$$

Zaveh: Gauss-Seidelova metoda pri reševanju diskretne Poissonove enačbe za pravokotno območje konvergira približno dvakrat hitreje kot Jacobijska metoda,

- Izboldati pa se da tudi Gauss-Seidelova iteracija

Metoda SOR (Successive Over Relaxation) (63)

- Ta metoda se pogosto uporablja pri iterativnih metodah za PDE
- Najo lahkho gledamo kot na ekstrapolacijo GS metode!
- Ogljedali si po bonu samo za nševanje Poissonove enačbe.
- Naj $u_{jk}^{(r)}$ označuje približek po metodi SOR, $\tilde{u}_{jk}^{(r)}$ pa po GS metodi. Potem mor približek po SOR metodi izračunamo kot

$$u_{jk}^{(r+1)} = w \tilde{u}_{jk}^{(r+1)} + (1-w) u_{jk}^{(r)},$$

kjer je w izbrani parameter, ki ga lahko tudi prilagajamo.

Korak SOR metode se poenastavlja (64)

$$u_{jk}^{(r+1)} = w \left(\theta_x (u_{j-1,k}^{(r+1)} + u_{j+1,k}^{(r)}) + \theta_y (u_{j,k-1}^{(r+1)} + u_{j,k+1}^{(r)}) + b_{jk} \right) + (1-w) u_{jk}^{(r)},$$

$$j = 1, 2, \dots, J; k = 1, 2, \dots, K; r = 0, 1, \dots$$

V matricini obliki

$$(\mathbf{I} - w(\mathbf{F} + \mathbf{B})) \mathbf{u}^{(r+1)}$$

$$= ((1-w)\mathbf{I} + w(\mathbf{F}^T + \mathbf{B}^T)) \mathbf{u}^{(r)} + w\mathbf{b}$$

V iteracijsko obliko zapisemo kot

$$\mathbf{u}^{(r+1)} = \mathbf{T}_w \mathbf{u}^{(r)} + w(\mathbf{I} - w(\mathbf{F} + \mathbf{B}))^{-1} \mathbf{b},$$

$$r = 0, 1, \dots,$$

pri čemer je iteracijska matrika $\mathbf{T}_w$ enaka

$$\mathbf{T}_w = (\mathbf{I} - w(\mathbf{F} + \mathbf{B}))^{-1} ((1-w)\mathbf{I} + w(\mathbf{F}^T + \mathbf{B}^T))$$

- Naj bode $\gamma = \gamma_w$ lastne vrednosti T_w , torej ničle karakterističnega polinoma

$$p(\gamma_w) := \det(\gamma_w I - T_w) = 0.$$

- Matrika $I - w(F+B)$ je neregularna, zato so γ_w pozitivne enačbe

$$0 = \det(\gamma_w(I - w(F+B)) - ((1-w)I + w(F^T + B^T))).$$

- Če vsakega od členov zgoraj determinante delimo z $w\sqrt{\gamma_w} \neq 0$, dobimo

$$\det\left(\frac{\gamma_w + w^{-1}}{w\sqrt{\gamma_w}} I - \left(\sqrt{\gamma_w} F + \frac{1}{\sqrt{\gamma_w}} F^T\right) - \left(\sqrt{\gamma_w} B + \frac{1}{\sqrt{\gamma_w}} B^T\right)\right) = 0$$

Po Youngovem izreku (glejte knjigo prof. Koraha: Numerična analiza, str. 320) je: zgoraj determinanta enaka

$$\det \left(\frac{\gamma_w + w - 1}{w \sqrt{\gamma_w}} \mathbf{I} - (F + F^T) - (B + B^T) \right) = 0 \quad (66)$$

Ker je iteracijska matrika Jacobijev
iteracije enaka $T_J = (F + B + F^T + B^T)$,
smo torej izpeljali zvezo

$$\mu = \frac{\gamma_w + w - 1}{w \sqrt{\gamma_w}} \in \sigma(T_J) \Leftrightarrow \gamma_w \in \sigma(T_w).$$

Torej je

$$\gamma_w = \frac{w\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{w\mu}{2}\right)^2 + 1 - w}.$$

Parameter w je še vedno poljuben
(v limiti ne, ker se izkaže, da mora
biti $0 < w < 2$).

Z nekaj računanja dobimo optimalni
 w^* :

$$w^* = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(T_J)}}$$

- Če za w izberemo w^* , potem (67) se da tudi videti, da SOR metoda konvergira za red hitreje kot Jacobijeva ali GS metoda. Natavineje

$$\rho(Tw^*) = 1 - 2\delta\pi \sqrt{2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \delta(5^2)}.$$

- Omenjene iterativne metode lahko uporabimo kot osnovo za t.i. večvrstne metode.
- Slednje bi potrebovale obširen samostojen razdelek, zato bomo obravnavo izpustili.
- Osnovna ideja je uporaba vzgnezdenih mrež različnih karakterov.
- Nato uporabimo varianta Richardsonove ekstrapolacije za izločanje vodilnega člena napake

Metode podprostorov Krylova

(68)

• Stečamo jih pri reševanju velikih sistemov $Ax = b$ in pri reševanju problema lastnih vrednosti.

• Osnovna ideja je, da pri reševanju sistema matrike A ne potrebujemo eksplicitno, ampak le način (predpis), kako izračunati $x \mapsto Ax$.

• Zelo učinkovite so za reševanje sistemov z razpršenimi matrikami.

• Za matriko A in vektor b je k -ti podprostor Krylova definirani kot

$$K_k(A, b) := \text{Lin}\{b, Ab, \dots, A^{k-1}b\}.$$

• Dobimo ga s $k-1$ zaporednimi množenji vektora b z matriko A .

• Približno rešitev problema želimo
poiskati v projekciji problema $Ax=b$
na prostor $\mathcal{K}_k(A, b)$. (69)

• Za uspešno delovanje algoritma potrebujemo
dve:

(i) Konstrukcijo numerično stabilne baze
prostora $\mathcal{K}_k(A, b)$: Arnoldjev
algoritem za splošno matriko ali
Lanczosev za simetrično.

(ii) Iterativno preževanje približne
rešitve glede na izbrani kriterij
optimalnosti (recimo metoda
konjugiranih gradientov za simetrično,
pozitivno definitno matriko)

• Metode podprograma Krylova imajo veliko
izpeljavk in so podrobno opisane v literaturi.