

# Analiza 1

---

## Integral

(1) Izračunaj naslednje integrale:

(a)  $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} dx,$

(b)  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx,$

(c)  $\int 2^x 3^{x-2} dx.$

(2) Izračunaj naslednje integrale z uvedbo nove spremenljivke:

(a)  $\int \frac{x}{1+x^4} dx,$

(b)  $\int \frac{1}{9+4x^2} dx,$

(c)  $\int \frac{x^2}{(x-1)^{100}} dx,$

(d)  $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx.$

(3) Izračunaj naslednje integrale z uvedbo nove spremenljivke:

(a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})},$

(b)  $\int \sqrt{16-x^2} dx,$

(c)  $\int \sqrt{1+x^2} dx.$

(4) Izračunaj naslednje integrale z uvedbo nove spremenljivke:

(a)  $\int \frac{1}{1-\cos x} dx,$

(b)  $\int \frac{1}{\sin x} dx,$

(c)  $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x} dx,$

(d)  $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$

(5) Izračunaj naslednje integrale z integracijo po delih:

(a)  $\int x^n \ln x \, dx, \, n \in \mathbb{N},$

(b)  $\int \arctg \sqrt{x} \, dx,$

(c)  $\int e^{ax} \cos bx \, dx, \, a, b \in \mathbb{R},$

(d)  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} \, dx,$

(e)  $\int \sin x \ln(\operatorname{tg} x) \, dx.$

(6) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a)  $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} \, dx,$

(b)  $\int \frac{-25 + 25x + 4x^2 + x^3}{25x^2 + x^4} \, dx,$

(c)  $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \, dx,$

(d)  $\int \frac{21x^5}{x^6 + 9x^3 + 8} \, dx.$

(7) Izračunaj integrale racionalnih funkcij:

(a)  $\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 2} \, dx,$

(b)  $\int \frac{2}{(x^2 + 1)^2} \, dx,$

(c)  $\int \frac{16x^2 + 16}{x^4 + 4} \, dx.$

(8) Izračunaj integrale korenskih funkcij:

(a)  $\int \frac{1}{(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})^3} \, dx,$

(b)  $\int \frac{2 + \sqrt{x+1}}{x+1 - \sqrt{x+1}} \, dx,$

(c)  $\int \frac{1}{x+1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \, dx.$

(9) Izračunaj integrale korenskih funkcij:

(a)  $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} \, dx,$

(b)  $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2 + 4x}} \, dx.$

(10) Izračunaj integrala korenskih funkcij:

(a)  $\int \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} dx,$

(b)  $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1 - x^2}} dx.$

(11) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a)  $\int \cos^5 x dx,$

(b)  $\int \sin^{10} x \cos^3 x dx,$

(c)  $\int \cos^4 x \sin^2 x dx.$

(12) Izračunaj integrala trigonometričnih funkcij:

(a)  $\int \frac{1}{5 + 4 \cos x} dx,$

(b)  $\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx.$

(13) Izračunaj integrale trigonometričnih funkcij:

(a)  $\int \sin(6x) \cos(13x) dx,$

(b)  $\int x^2 \sin x dx,$

(c)  $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x + 1}} dx.$

(14) Izračunaj integrale eksponentnih in logaritamskih funkcij:

(a)  $\int x^2 e^{3x} dx,$

(b)  $\int \ln^2 x dx,$

(c)  $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$

(15) Izračunaj določena integrala s pomočjo prevedbe na Riemannovo vsoto:

(a)  $\int_0^1 x^2 dx,$

(b)  $\int_1^2 2^x dx.$

(16) Za  $s > 0$  izračunaj limito

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^s + 2^s + \dots + n^s}{n^{s+1}}.$$

(17) Naj bo  $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  zvezna funkcija. Poenostavi izraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n}) \dots f(\frac{n}{n})}.$$

(18) Za naslednje funkcije ugotovi, ali so integrabilne na intervali  $[0, 1]$ . Svoj odgovor utemelji z uporabi Riemannovih vsot.

a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0, \\ 1 & ; x \in (0, 1]. \end{cases}$$

b)

$$g(x) = \begin{cases} 0 & ; x \text{ je iracionalen,} \\ 1 & ; x \text{ je racionalen.} \end{cases}$$

c)

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ; x \text{ je iracionalen,} \\ 1 & ; x = 0, \\ \frac{1}{n} & ; x = \frac{m}{n}, \text{ kjer sta si } m, n \in \mathbb{N} \text{ tuji.} \end{cases}$$

Premisli, da za vsak  $x \in [0, 1]$  velja  $g(x) = f \circ h(x)$ . Kaj nam to pove o kompozitumu integrabilnih funkcij?

(19) Izračunaj integrala:

(a)  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, n \in \mathbb{N},$

(b)  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx) \, dx, n \in \mathbb{N}.$

(20) (a) Naj bo  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna funkcija. Pokaži naslednje enakosti

$$\int_0^\pi x f(\sin x) \, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, dx.$$

(b) Izračunaj integral

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx.$$

(21) Naj bo  $0 < a < b$  in  $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$  zvezna funkcija. Definirajmo funkciji  $F$  in  $G$  s predpisoma:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt,$$
$$G(x) = \int_a^x t f(t) \, dt.$$

Dokaži, da je funkcija  $\frac{F}{G}$  definirana in padajoča na intervalu  $(a, b)$ .

(22) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali obstaja. Če obstaja, ga izračunaj.

- (a)  $\int_0^1 \ln x \, dx,$
- (b)  $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx, \quad a > 0,$
- (c)  $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{|x - 1|}} \, dx.$

(23) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali obstaja. Če obstaja, ga izračunaj.

- (a)  $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx, \quad n \in \mathbb{N},$
- (b)  $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln^\alpha x} \, dx, \quad \alpha > 0,$
- (c)  $\int_0^\infty \frac{9x}{x^3 - 3x + 2} \, dx.$

(24) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali konvergira:

- (a)  $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \, dx,$
- (b)  $\int_0^\infty \frac{\arctg x}{x} \, dx,$
- (c)  $\int_{-1}^\infty \frac{x \arctg x}{\sqrt[3]{1 + x^7}} \, dx,$
- (d)  $\int_0^\infty \frac{\ln x}{3 + 2x^2} \, dx.$

(25) Za vsakega od spodnjih integralov ugotovi, ali konvergira:

- (a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \, dx, \quad k \in [0, 1],$
- (b)  $\int_0^\infty \frac{1}{x^a + x^b} \, dx, \quad 0 < a < b,$
- (c)  $\int_{\sqrt{a}}^\infty \frac{1}{(x^2 - a)^{2a}} \, dx, \quad a > 0.$

(26) Izračunaj ploščino:

- (a) lemniskate, ki je dana v polarnih koordinatah s predpisom  $r(\phi) = a\sqrt{\cos(2\phi)}$  za nek  $a > 0,$
- (b) zanke Descartovega lista, ki je podan v parametrični obliki s predpisom  $x(t) = \frac{3at}{1+t^3},$   
 $y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$  za nek  $a > 0.$

(27) Izračunaj:

- (a) obseg astroide, ki je podana z enačbo  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  za nek  $a > 0$ ,
  - (b) obseg kardioide, ki je podana v polarnih koordinatah s predpisom  $r(\phi) = a(1 + \cos \phi)$  za nek  $a > 0$ ,
  - (c) dolžino grafa funkcije  $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$  nad intervalom  $[1, e]$ .
- (28) Graf funkcije  $f(x) = \frac{1}{x}$  nad intervalom  $[1, \infty)$  zavrtimo okoli abscisne osi. Izračunaj prostornino in površino tako dobljene vrtenine.
- (29) Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobimo, če kardiodo  $r(\phi) = 1 + \cos \phi$  zavrtimo okoli abscisne osi.
- (30) Lik  $L$  omejujeta parabola  $y = 4 - x^2$  in abscisna os. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika  $L$  okrog osi  $x = 3$ .