

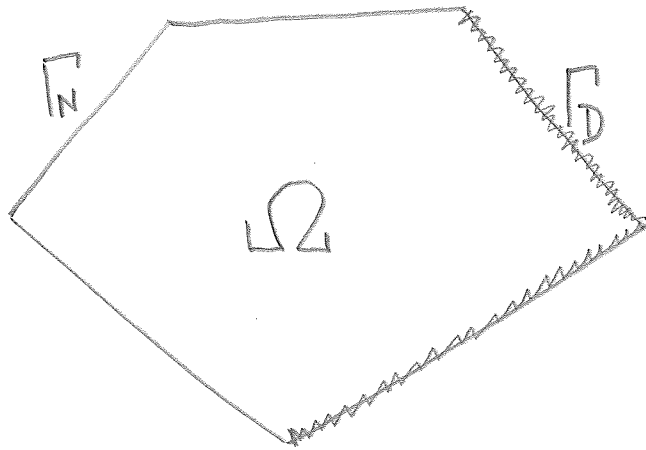
Metoda končnih elementov

①

Osnove metode končnih elementov

(ang. Finite Element Methods, FEM)

- Najprej moramo opisati geometrijo problema
Skica preproste geometrije je na primer:



$$\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$$

- Podan je torej poligon Ω v $\mathbb{R}^2$ (omejili se bomo na dvodimenzionalne končne elemente) z robom Γ (poligon ima lahko tudi eno ali več luknj, v tem primeru je rob sestavljen iz več poligonskih krivulj)
- Rob Γ je razdeljen na dva dela, Γ_N in Γ_D , ki se ne prekrivata:

- rob z Dirichletovimi pogoji (Dirichletov rob) Γ_D ,
- rob z Neumannovimi pogoji (Neumannov rob) Γ_N .
- Pogoji na robu Γ_D določajo odmiti rešitve, pogoji na Γ_N pa obnašanje rešitve v normalni smeri na rob Γ .
- Priizkustimo, da je rob od dveh delov roba Γ , torej Γ_D in Γ_N , določen z unijo celih stranic poligona.

Modelni problem v krepki obliki

- Na območju Ω rešujemo eliptično parcialno diferencialno enačbo drugega reda z danimi robnimi pogoji:

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{na } \Omega,$$

$$u = g_0 \quad \text{na } \Gamma_D,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g_1 \quad \text{na } \Gamma_N,$$

kjer je $c \geq 0$ konstanta (povzemi $c=0$ ali $c=1$).

- Enačbi pogosto rešujemo reakcijsko-difuzijska (3)
enačba (difuzijski del je $-\Delta u$, reakcijski
pa $c u$, če je $c > 0$).
- Funkcijo f si lahko predstavljamo kot
površinsko gostoto sil.
- Za funkciji g_0 in g_1 privzamemo:
 $g_0 \in \mathcal{C}(\Gamma_D)$, g_1 je lahko tudi nezvezna.
- Kot ponavadi je $\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u) \cdot n$, n enotska
zunanja normala (∇u je gradient, vektor).
- Za odvode zamekrt predpostavimo, da
obstajajo povod, kjer jih obravnavamo.

Greenov izrek

- Nova metoda končnih elementov je "prepis"
v popolnoma drugačno, t.i. šibko ali
variacijsko obliko.

- Na spomenu buejši del tega "prepis" (4) je Greenov izrek (eden na spomenu buejših rezultatov vektorskega računa).

Pogosto mu rečemo tudi prva Greenova formula:

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v)^T \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) \cdot v \, d\Gamma$$

(podoben izrek velja tudi v $\mathbb{R}^3$).

Opomba: Izrek je v resnici preprosta posledica divergenčnega izreka (Gaussovega izreka oz. izreka Ostrogradskega):

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} p) \cdot v \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla v \cdot p \, d\Omega = \int_{\Gamma} (p^T \cdot n) v \, d\Gamma,$$

pri čemer je $p = (p_1, p_2)^T$ vektorsko polje in $\operatorname{div} p = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial x_2}$. Greenov izrek sledi, če je $p = (\nabla u)^T$

Modelni problem v šibki obliki

(5)

- Zapišimo Greenovo formulo za izbrani modelni problem

$$\int_{\Omega} (\Delta u) \cdot v \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v)^T \, d\Omega \\ = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\Gamma = \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\Gamma_D + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\Gamma_N$$

- Pomen „simetrične“ speljane funkcije v bo razpisnem praznec.

- V zgornji formuli upoštevamo, kar vemo o u ; $-\Delta u = f - c \cdot u$, $\frac{\partial u}{\partial n} = g_1$ na Γ_N :

$$\int_{\Omega} \nabla u (\nabla v)^T \, d\Omega \\ = \int_{\Omega} (f - c \cdot u) \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\Gamma_D + \int_{\Gamma_N} g_1 v \, d\Gamma_N$$

Prejema

$$\int_{\Omega} \nabla u (\nabla v)^T \, d\Omega + \int_{\Omega} c \cdot u \cdot v \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v \, d\Gamma_N + \int_{\Gamma_D} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) v \, d\Gamma_D$$

Ker ne poznamo $\frac{\partial u}{\partial n}$ na Γ_D , bomo za
v zahtevali, da ji

$$v \equiv 0 \text{ na } \Gamma_D.$$

Tako dobimo

$$\int_{\Omega} \nabla u (\nabla v)^T d\Omega + c \int_{\Omega} u v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v d\Gamma_N$$

za take testne funkcije v , ki zadoščajo
pogoju $v = 0$ na Γ_D .

Opombe:

- Nismo si upoštevali Dirichletovega
robnega pogoja $u = g_0$ na Γ_D .
- Podatki, torej f in g_1 so na desni strani
enake, koeficienti enake (v tem
primeru samo c), so na levi strani.
- Izraz na levi je linearen v u
in v (bilinearna forma u in v),
izraz na desni je linearen v v .

- Zaenkrat pustimo ob strani razmislek, (7)
v kakšnih funkcijskih prostorih sta
funkciji u in v ter zapišimo
sibho formulacijo problema:

Sibha oblika

Poiščite funkcijo u , za katero je

$$u = g_0 \text{ na } \Gamma_D,$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v)^T d\Omega + \int_{\Omega} u \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v d\Gamma,$$

kjer je v taka funkcija, da je $v = 0$ na Γ_D

- Robni pogoji se v formulaciji pojavljajo
na dva zelo različna načina:
 - Dirichletov pogoj (odnisek) je podan
ločeno od integralne formulaciji.
Rečemo mu tudi obistinski robni
pogoj (essential boundary condition).
 - Neumannov pogoj (vpliv v smeri normal) se
pojavlja v formulaciji (naravni robni pogoj)

- V splošnih problemih tega tipa se
neobhodni robni pogoj manjša na pogoj,
ki je ločen od formulaciji, medtem
ko je naravni pogoj vgrajen v formulacijo.
- V šibki formulaciji eliptične enačbe drugega
reda je takš:
Dirichletov pogoj $\equiv$ neobhodni,
Neumannov pogoj $\equiv$ naravni.
- Kaj predstavlja funkcija v ?
 - Ponavadi ji rečemo testna funkcija,
ker na nek način testira enačbo, ki
ji zadošča u
 - Namerno da bi preverjali zadoščanje
enačbi po točkah, v testnimu funkcijam
 v preverjamo meho "povprečno verziro
enačbe".

- Na mnogih področjih (mekanika, inženirstvo, fizika) na v gledajo kot na virtualni odmiki (virtualno delo, ...). (princip virtualnega dela).

Prostori testov in testnih funkcij

- Boli formalno in bomo ogledali, v kakšnih prostorih iščemo teste in testne funkcije.

- Najpomembnejšo vlogo igrajo prostori:

$$- L^2(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega < \infty \right\}.$$

$$- H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \in L^2(\Omega) \right\}$$

z normo

$$\|u\|_{1,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \int_{\Omega} u^2 d\Omega \right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + u^2 \right) d\Omega \right)^{1/2}$$

(energjska norma; funkcije, ki imajo končno normo so funkcije s končno energijo).

- podprostor prostora $H^1(\Omega)$:

(10)

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ na } \Gamma_0\}$$

Ker je $H_{\Gamma_0}^1$ podprostor $H^1(\Omega)$, vs linearne kombinacije elementov $H_{\Gamma_0}^1$ ležijo v $H_{\Gamma_0}^1$.

• Kako je s parcialnimi odvodi v definiciji $H^1(\Omega)$?

V spletnem funkciji iz $L^2(\Omega)$ niso
parcialno odvedljive !!

• Kako je z pozitivno funkcijami na Γ_0 ?

(funkcije iz $L^2(\Omega)$ niso funkcije v
klasiranem smislu ampak ekvivalentni
razredi funkcij)

• Obstajajo različni načini, kako
formalizirati zgoraj pomenukljivosti!

- Definiramo šibki odvod za elemente prostora $L^2(\Omega)$, ki je spet v $L^2(\Omega)$. Ustrezno definiramo skrajne funkcije na Γ_D .
- Problem umestimo v teorijo distribucij in prostorov Soboleva.
- Najprej gledamo prostor
$$\mathcal{C}^1(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) ; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})\},$$

kato pa ga razpravljamo glede na normo $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. V nadaljevanju pokažemo, da je mogoče smiselno definirati restrikcijo na Γ_D .

- Poglejmo si sedaj reformulirano problema v šibki obliki glede na definirane prostorske funkcije.

• Najdemo $u \in H^1(\Omega)$, da je

$$u = g_0 \text{ na } \Gamma_D,$$

$$\int_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v)^T d\Omega + c \int_{\Omega} uv d\Omega$$

$$= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v, \text{ za vsek } v \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$$

• Pri tem zahtevamo, da so dane funkcije iz naslednjih prostorov:

$$f \in L^2(\Omega), \quad g_1 \in L^2(\Gamma_N), \quad g_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D),$$

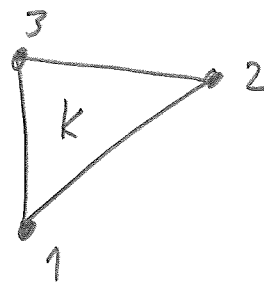
kjer $g_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ pomeni, da obstaja vsaj funkcija $u_0 \in H^1(\Omega)$, da je $u_0 = g_0$ na Γ_D .

Prostor zveznih linearnih elementov

(13)

Linearna funkcija na trikotniku

- Funkcija $p(x_1, x_2) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ je linearna funkcija dveh spremenljivk, $p \in \Pi_1$.
- Določena je z vrednostmi na treh nekolinearnih točkah.
- Funkcija $p \in \Pi_1$ je lahko določena z
 - vrednostmi a_0 , a_1 in a_2 ,
 - vrednostmi na treh ogliščih trikotnika K :

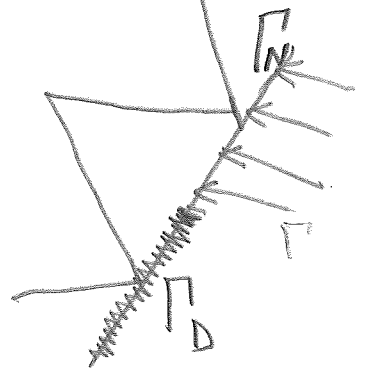
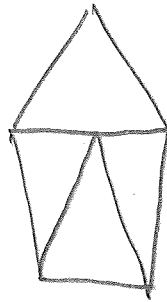
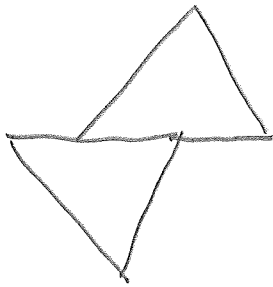


- Prostor Π_1 je torej vektorski prostor dimenzije 3.
- Če izberemo reprezentacijo funkcije p na podlagi oglišč trikotnika K , potem vrednostim v ogliščih rečemo prototipne stopnje.

- Vrednost funkcij $p \in P_1$ na robu, ki povezuje dve oglišči, je odvisna samo od vrednosti p v teh dveh ogliščih.

Triangulaciji

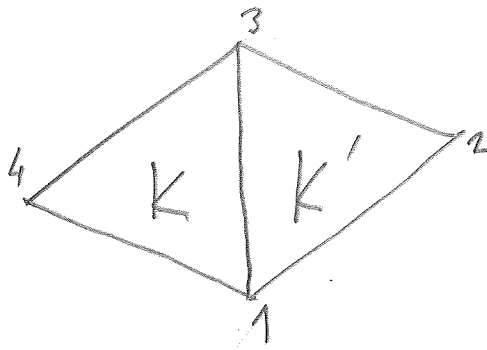
- Območji Ω razdelimo na množico trikotnikov, tako da velja
 - če se dva trikotnika sekata, potem ji presečišče bodisi točka, bodisi cel rob,
 - triangulacija mora upoštevati delitev roba na Dirichletov in Neumannov rob.



Prepovedani tipi Triangulaciji!

- Triangulacijo ponovimo otvarimo $\partial\Omega$, ki je navedeni rob. Odsekoma linearno funkciji na Triangulacijah

- Naj bosta K in K' sosednja trikotnika Triangulaciji Ω .



• Na podlagi vrednosti α starih oglišč definiramo odsekoma linearno funkcijo, ki ji zvezna pramo skupnega roba.

• Tako lahko nadaljujemo za vsa trikotniška α T_h . Dobimo pratar

$$V_h = \{ u_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) ; u_h|_K \in \mathbb{P}_1, K \in T_h \}$$

odsekoma linearnih funkcij na T_h .

• Če izberemo vrednosti na ogliščih triangulaciji T_h , obstaja enolična funkcija $u_h \in V_h$, ki jih interpolira.

Oglišča imenujemo tudi vozlišča, elementi V_h pa $\mathbb{P}_1$ končni elementi.

• Vozlišča triangulaciji ostetimo (do nujnega sistema lin. enačb način stavitelja in pomembni).

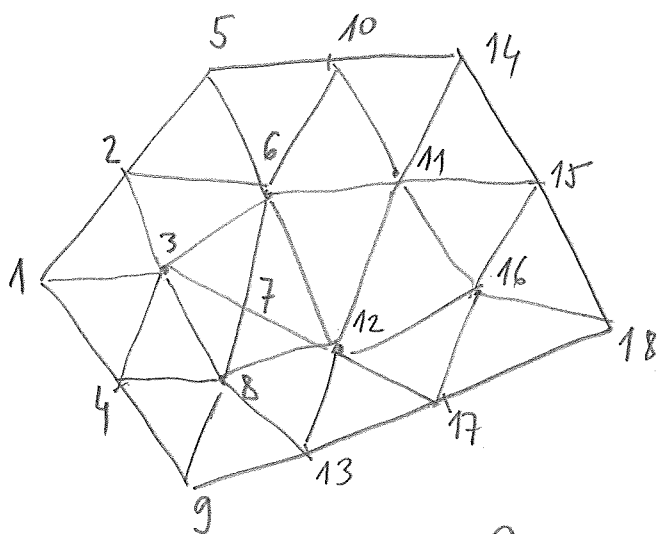
• Označimo vozlišča s p_i , kjer je $i = 1, 2, \dots, N$, N je število vozlišč.

(16)

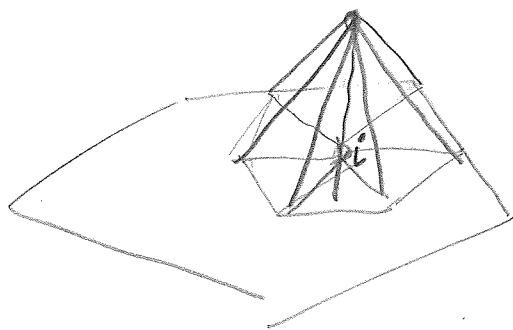
• Če izberemo eno vozlišče, denimo p_i in mu pripisemo vrednost 1, vsem ostalim pa 0, dobimo enolično določeno funkcijo

$\varphi \in V_h$:

$$\varphi_i(p_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1; & j = i, \\ 0; & j \neq i. \end{cases}$$



Triangulacija $\mathcal{T}_h$ in globalno število φ_i .



Funkcija φ_i .

• Če trikotnik K ne vsebuje p_i kot vozlišča, je $\varphi_i = 0$ na celotnem trikotniku K .

Torej je množica φ_i množica trikotnikov, ki si delijo p_i kot skupno oglišče.

• Velja tudi:

Če je $u_h \in V_h$, potem se u_h izraža
kot (17)

$$u_h = \sum_{j=1}^N \overbrace{u_h(p_j)}^{\text{rednot v vredicah } p_j} \varphi_j.$$

Naj bo danih $u_h \in V_h$. Kot vemo, je enolično
dana z rednotami v vredicah $p_i, i=1,2,\dots,N$.

Izberimo $f = \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \varphi_j$. Potem je

$$\begin{aligned} f(p_i) &= \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \varphi_j(p_i) = \sum_{j=1}^N u_h(p_j) \delta_{ij} \\ &= u_h(p_i). \end{aligned}$$

Zaradi enoličnosti mora
biti $f \equiv u_h$.

Dokazali smo hkrati linearno neodvisnost
funkcij φ_i , kar pomeni, da so $\varphi_i, i=1,2,\dots,N$,
baza prostora V_h . Torej je $\dim V_h = N$
 $= \# \text{ vredic } T_h$.

• Ta baza je posebna zato, ker so koeficienti razvoja $u_h \in V_h$ po bazi $\{\psi_i\}_{i=1}^N$ ravno vrednosti u_h v vozliščih. (18)

• Prostor V_h smo zgradili tako, da smo zvezno zlepili linearno funkcije na posameznih trikotnikih. Izhaja se, da, če želimo $u_h \in H^1(\Omega)$, potem mora biti V_h prostor najzveznejših funkcij.

Izrek: Naj bo u_h funkcija, definirana na Ω in vsaka njena restrikcija na trikotnik T_h polinom (ali gladka funkcija).

Potem je

$$u_h \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow u_h \text{ je zvezna.}$$

Dirichletova vozlišča

• Posvetimo se sedaj robu območja Ω .

• Stranici trikotnika, ki ležita na Γ_D bomo rekli Dirichletova stranica, podobno definiramo Neumannovo stranico.

Oglišča Dirichletovih stranic imenujemo Dirichletova rolišča. Proizvedemo nato, če je rolišča na robu Dirichletove in Neumannove stranice. Potem ga izberemo kot Dirichletovo rolišče.

Pomembna bodo Dirichletova rolišča in Neumannovi robovi.

Zanima nas prostor

$$V_h^{\Gamma_D} = V_h \cap H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v_h \in V_h; v_h = 0 \text{ na } \Gamma_D\}.$$

Ker smo se omejili na take triangulacije Ω , ki upoštevajo delitev roba na Dirichletov in Neumannov rob, velja:

$v_h \in V_h$ je ničelna na Γ_D natanko tedaj, ko je ničelna na Dirichletovih roliščih.

Ali lahko enostavno konstruiramo bazo prostora $V_h^{\Gamma_D}$?

• Odgovor je preprosto: izločimo tiste baze funkcij, ki pripadajo Dirichletovim vozliščem. (20)

• Uvedemo dva nabora indeksov vozlišč triangulaciji Ω : Dir - indeksi, ki pripadajo Dirichletovim vozliščem

Ind (independent or free) - indeksi, ki pripadajo ostalim vozliščem

• Za našo modelno triangulacijo je

$$\text{Dir} = \{9, 13, 14, 15, 17, 18\},$$

$$\text{Ind} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 16\}.$$

• Element $p_h \in V_h$ lahko torej zapisemo kot

$$u_h = \sum_{j \in \text{Ind}} u_j \varphi_j + \sum_{j \in \text{Dir}} u_j' \varphi_j, \quad u_j = u_h(p_j),$$

element $u_h \in V_h^{\Gamma_D}$ pa kot

$$v_h = \sum_{j \in \text{Ind}} v_j \varphi_j$$

• Obenem smo ugotovili $\dim V_h^{\Gamma_D} = \#\text{Ind} = N - \#\text{Dir}$.

- Problem končnih elementov (z linearnimi (21) končnimi elementi na trikotnikih) za modelno enačbo v ribki obliki se glasi

Poišči $u_h \in V_h$, da je

$$u_h(p) = g_0(p) \quad \text{za vsako Dirichletovo} \\ \text{vrzlišče } p$$

$$\int_{\Omega} \nabla u_h (\nabla v_h)^T d\Omega + c \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega \\ = \int_{\Omega} f v_h d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v_h d\Gamma_N, \quad \text{za vseh } v_h \in V_h^{\Gamma_D}$$

Problem smo poenostavili tako, da:

- Iščemo rešitev v V_h namesto v prostoru Soboljeva $H^1(\Omega)$.
- Dirichletove robne pogoje smo nadomestili z vrednostmi v Dirichletovih vrzliščih. To zmanjša število neznank na število prostih vrzlišč.
- Testni prostor funkcij smo reducirali na $V_h^{\Gamma_D}$ namesto $H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \Rightarrow$ nekatero število testov se reducira na končno število linearnih enačb.

Pripadajoči sistem enačb

(22)

• Nabor enačb

$$\int_{\Omega} \nabla u_h (\nabla v_h)^T d\Omega + c \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 v_h d\Gamma_N,$$

za vsak $v_h \in V_h^{\Gamma_D \cup \Omega}$

je ekvivalenten naboru

$$\int_{\Omega} \nabla u_h (\nabla \varphi_i)^T d\Omega + c \int_{\Omega} u_h \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 \varphi_i d\Gamma_N,$$

za vsak $i \in \text{Ind.}$

• Od tod sledi sistem linearnih enačb za modelni problem v sili oblike:

$$\text{— Pišimo } u_h = \sum_{j \in \text{Ind}} u_j \varphi_j + \sum_{j \in \text{Dir}} u_j \varphi_j$$

$$= \sum_{j \in \text{Ind}} u_j \varphi_j + \sum_{j \in \text{Dir}} g_0(x_j) \varphi_j.$$

— Ta izraz vstavimo v

$$\int_{\Omega} \nabla u_h (\nabla \varphi_i)^T d\Omega + c \int_{\Omega} u_h \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 \varphi_i d\Gamma_N$$

upostevamo

(23)

$$\nabla u_h = \sum_{j \in \text{Ind}} u_j \nabla \varphi_j + \sum_{j \in \text{Dir}} g_0(p_j) \nabla \varphi_j$$

in dobimo

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \text{Ind}} \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_j (\nabla \varphi_i)^T d\Omega + c \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega \right) u_j \\ &= \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_1 \varphi_i d\Gamma_N - \sum_{j \in \text{Dir}} \left(\int_{\Omega} \nabla \varphi_j (\nabla \varphi_i)^T d\Omega \right. \\ & \quad \left. + c \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega \right) g_0(p_j), \quad i \in \text{Ind} \end{aligned}$$

• Sterilo enost in nezmanke je
 $\# \text{Ind} = \dim V_h^{\Gamma_D}$.

• Nezmanke so vedno v velikih
 iz množice Ind

• Ko sistem rešimo, konstruiramo
 funkcijo u_h , ki aproksimira rešitev
 na Ω .