

ANALIZA 1
24. domača naloga

(1) Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ zvezna funkcija.

(a) Dana je funkcija $F(x) = \int_0^x f(t^2) dt$. Utemelji, da je F odvedljiva in izračunaj njen odvod.

(b) Dana je funkcija $G(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$. Utemelji, da je G odvedljiva in izračunaj njen odvod.

(c) Najmanj koliko in največ koliko rešitev ima lahko enačba $F(x) = G(x)$?

(a) $F'(x) = f(x^2)$ (b) $G'(x) = 2xf(x^2)$ (c) Enačba ima lahko eno ali dve rešitvi.

(2) Poišči vse odvedljive funkcije f , za katere je povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[0, x]$ enaka $f(x)$.

f je lahko poljubna konstantna funkcija.

(3) Dani sta funkciji $f(x) = 2^x - 1$ in $g(x) = -x + 5$. Ugani, v kateri točki se grafa f in g sekata. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo graf funkcije f , graf funkcije g in abscisna os.

Grafa se sekata v $(2, 3)$. Ploščina je $\frac{3}{\ln 2} + \frac{5}{2}$.

(4) Izračunaj integrale

(a) $\int_{\ln \pi}^{\ln(3\pi/2)} e^x \sin(e^x) dx$ (b) $\int_1^{e^3} x \ln x dx$

(c) $\int_{-1}^1 \sqrt{\operatorname{ch} x - 1} dx$ (d) $\int_0^\infty e^{-2x} dx$

(e) $\int_{-\infty}^\infty |2 - x| \exp(-|x|) dx$ (f) $\int_0^\pi \frac{ab(a^2 + b^2)}{a^4 \cos^2 x + a^2 b^2 + b^4 \sin^2 x} dx, \quad a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(a) -1 (b) $\frac{5e^6 + 1}{4}$ (c) $4\sqrt{2}(\operatorname{ch} \frac{1}{2} - 1)$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $4 + 2e^{-2}$ (f) π , če je $ab > 0$; $-\pi$, če je $ab < 0$.

(5) Skiciraj grafa funkcij $f(x) = 8 \ln x$ in $g(x) = x^3 \ln x$ ter izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga grafa določata.

$12 \ln 2 + \frac{15}{16} - 8$

(6) Izračunaj ploščino območja med grafom funkcije $f(x) = (x^2 - 4)e^{-x}$ na intervalu $[0, \infty)$ in abscisno osjo.

$2 + 12e^{-2}$

(7) Naj bo $f(x) = e^x + x^3 - 1$ in $g(x) = x^3 e^x$. Skiciraj grafa funkcij f in g in izračunaj ploščino omejenega lika, ki ga grafa določata.

$3e - \frac{31}{4}$

(8) Funkcija $f: [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom $f(x) = \frac{1}{1 + 2 \cos^2 x}$. Izračunaj ploščino omejenega lika med grafom funkcije f in premico $y = \frac{1}{2}$.

$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

(9) (a) Izračunaj $\int \frac{x + 6}{2x^2 + 3x} dx$.

(b) Po definiciji preveri, ali obstaja integral $\int_{-1}^1 \frac{x + 6}{2x^2 + 3x} dx$.

(c) Po definiciji preveri, ali obstaja integral $\int_1^\infty \frac{x + 6}{2x^2 + 3x} dx$.

Nedoločeni integral je enak $2 \ln |x| - \frac{3}{2} \ln |2x + 3| + C$. Določena integrala ne obstajata.