

ANALIZA 1
25. domača naloga

- (1) Naj bo K krivulja, podana z enačbo $y = e^{-x}$, in t tista tangenta na krivuljo K , ki poteka skozi izhodišče. Določi ploščino območja, ki ga oklepajo krivulja K , njena asimptota in tangenta t .

$$\boxed{e/2}$$

- (2) Naj bo L omejen lik, ki ga omejujeta grafa funkcij $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $g(x) = \frac{1}{2}$. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo z vrtenjem lika L okrog abscisne osi.

$$\boxed{\pi^2/4}$$

- (3) Naj bo

$$f(x) = \frac{-1 + \ln x}{\sqrt{x}},$$

a ničla funkcije f in b točka, kjer f zavzame maksimum. Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane, če del grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ zavrtimo okoli abscisne osi.

$$\boxed{8\pi/3}$$

- (4) Naj bodo a, b in c pozitivna realna števila. Telo D ima osnovno ploskev

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

Presek D z ravnino $y = k$, $-b < k < b$ je lik nad ravnino xy , ki ga omejuje odsek parabole s temenom v točki $(0, k, c)$. Izračunaj volumen D !

$$\boxed{\frac{2\pi}{3}abc}$$

- (5) Ugotovi, za katere $r \in \mathbb{R}$ obstaja integral

$$\int_1^\infty \frac{5x+2}{x^r+x} dx$$

in odgovor utemelji. Če obstaja, izračunaj dani integral za $r = 3$.

$$\boxed{\text{Integral obstaja za } r > 2. \text{ Pri } r = 3 \text{ je enak } \frac{5\pi}{4} + \ln 2.}$$

- (6) Obravnavaj konvergenco naslednjih integralov.

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^4+1}}$

(b) $\int_0^\infty \frac{2x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x^9-3x^5+5x}} dx$

(c) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2-1} dx$

(d) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$

(e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 \ln(x^2+1)}{x^4+4} dx$

(f) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3+x^6}} dx$

(g) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x-e} dx$

(h) $\int_e^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x-e} dx$

(i) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{x^2+4} dx$

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| (a) konvergira | (b) divergira | (c) konvergira |
| (d) konvergira | (e) konvergira | (f) konvergira |
| (g) divergira | (h) konvergira | (i) divergira |

- (7) Obravnavaj konvergenco naslednjih integralov v odvisnosti od realnih parametrov p, q in r .

(a) $\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln^p(\ln x)}$

(b) $\int_0^1 x^{p-1}(x-1)^{q-1} dx$

(c) $\int_0^\infty \frac{x^p \operatorname{arctg} x}{1+x^q} dx$

(d) $\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

(e) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^p)}{1+x^p} dx$

(f) $\int_0^\infty \frac{\log(1+x)}{x^p(x+q)^r} dx$

- | | | |
|---------------------------|------------------------------|--|
| (a) divergira za vse p | (b) konvergira za $p, q > 0$ | (c) konvergira za $\begin{cases} -2 < p < q-1, & \text{če je } q \geq 0 \\ q-2 < p < -1, & \text{če je } q < 0 \end{cases}$ |
| (d) konvergira za $p > 0$ | (e) konvergira za $p > 1$ | (f) konvergira za $\begin{cases} 1-r < p < 2, & \text{če je } q > 0 \\ 1 < p+r < 2, & \text{če je } q = 0 \\ 1-r < p < 2, r < 1 & \text{če je } q < 0 \end{cases}$ |