

Matrica sistema enačb

(24)

Matrica dolžnega sistema enačb je "sestavljena" iz dveh pomembnih matrik:

- togostna matrica: $W = (w_{ij})_{i,j=1}^N$,

- masa matrica: $M = (m_{ij})_{i,j=1}^N$.

$$\text{kjer je } w_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j (\nabla \varphi_i)^T d\Omega \text{ in}$$

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega.$$

Trditev: Matrica M je simetrična pozitivno definitna, matrica W pa ^{simetrična} pozitivno semidefinitna.

Če v W odstranimo heterokoli vrstice, recimo i , in priredimo i -ti stolpec, je preostala matrica simetrična pozitivno definitna.

Dokaz: Dokažati bomo samo, da je M simetrična pozitivno definitna.

Simetričnost je očitno iz definicije elementa $m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega$.

Naj bo $x \in \mathbb{R}^N$. Izračunajmo

(25)

$$\begin{aligned} x^T M x &= \sum_{i=1}^N \left(x_i \sum_{j=1}^N m_{ij} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^N x_i \left(\sum_{j=1}^N m_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^N x_i \left(\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega \right) x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} (x_j \varphi_j) (x_i \varphi_i) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N x_i \varphi_i \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} f^2 d\Omega \geq 0, \end{aligned}$$

hkrati $f = \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i$.

Zgornji izraz je lahko enak 0 le, če je $f \equiv 0$ (t.j. zvezna). Ker so φ_i lin. neodvisne, mora tedaj biti $x_i = 0$ za vsi i in tokar je hkrati.

- S pomočjo definiranih matrik W in M (26) lahko sistem linearnih enačb, ki določa vektor u , zapisemo kot

$$\sum_{j \in \text{Ind}} (w_{ij} + c_{mij}) u_j = b_i - \sum_{j \in \text{Dir}} (w_{ij} + c_{mij}) g_o(p_j),$$

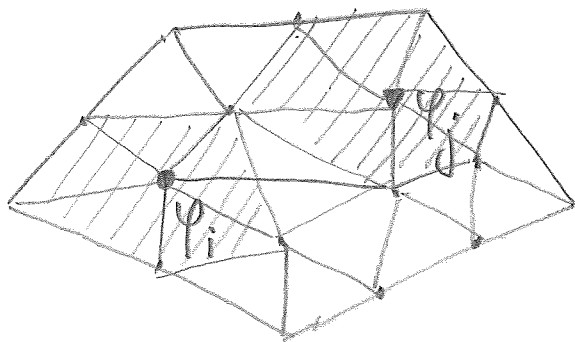
za vsak $i \in \text{Ind}$

Če je $c = 0$ in $\Gamma_0 = \emptyset$, potem enolična rešljivost ni zagotovljena, toda ta primer zanemarjamo.

- Če se mestna funkciji φ_i in φ_j ne sekata (o. sekata vzdolž stranice trikotnika), je ustrezni element $m_{ij} = 0$ (in obratno)

To se zgodi tedaj, ko vrhovi p_i in p_j nista oglišči istega trikotnika.

Pravimo, da sta dve vrhovi sosednji,
če sta oglišči istega trikotnika



Novleca funkcij φ_i in φ_j !

- Za elemente tridimne matrice W pa velja:

Če položaji i in j nista sosednji, je $w_{ij} = 0$. (Zakaj triditev ne drži v drugo smer?)

- Matrice sta zaradi zgorajih dejstev razpršeni!!!

- Zato pri reševanju sistema linearnih enačb pogosto uporabimo metode za sisteme, katerih matrika je razpršena

- Poleg Dirichletovih in Neumannovih pogojev imamo lahko tudi mešane pogoje. Med njimi je posebej znan Robinov (ali Fourierov) robni pogoj.

Robinar robni pogoji

(28)

Resujemo robni problem

$$-\Delta u + cu = f \quad \text{na } \Omega,$$

$$\boxed{\partial_n u + ku = g \quad \text{na } \Gamma = \partial\Omega}, \quad k > 0$$

Robinar robni pogoji

Šibka oblika problema v diskretni obliki
se glasi (izpeljite ponovno s pomočjo Greenove formule)
iščemo $u_h \in V_h$, da bo

$$\int_{\Omega} \nabla u_h (\nabla v_h)^T d\Omega + c \int_{\Omega} u_h v_h d\Omega$$

$$+ k \int_{\Gamma} u_h v_h d\Gamma = \int_{\Omega} f v_h d\Omega + \int_{\Gamma} g v_h d\Gamma,$$

za vsak $v_h \in V_h$

Ponovno pišemo $u_h = \sum_j u_j \varphi_j$ in

razdelimo indekso numerico na

$M \in \mathbb{N}$ in $B \in \mathbb{N}$, kjer j in i sta množica indeksov, ki
pripadajo notranjim vozliščem (takim, ki
so v Ω), B pa množica indeksov, ki

prilpadajo $\partial\Omega$.

(29)

- Resiti moramo torej sistem enačb

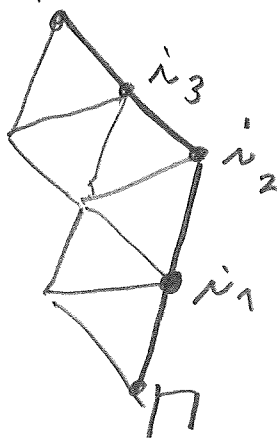
$$\int_{\Omega} \nabla u_h (\nabla \varphi_i)^T d\Omega + c \int_{\Omega} u_h \varphi_i d\Omega$$

$$+ b \int_{\Gamma} u_h \varphi_i d\Gamma = \int_{\Omega} f \varphi_i d\Omega + \int_{\Gamma} g \varphi_i d\Gamma,$$

za vsak φ_i

- Dobili smo torej dodatno robno masno
matriko: $M_B = \left(\int_{\Gamma} \varphi_j \varphi_i d\Gamma \right)_{i,j=1}^N$,

ki ima v vsaki vrstici samo tri nenulne
elemente, ki prilpadajo trem indeksom
iz B_{nd} :



Primeri :

(30)

$$\Omega =$$

- ① Delec potuje po pravokotniku $\downarrow [-a/2, a/2] \times [-b/2, b/2]$, pri čemer sledi načelom Brownovega gibanja (infinitesimalni premiki v vsako smer so enako verjetni). Gibanje začne v točki $T(x, y)$. Kolikšna je verjetnost, da zapusti pravokotnik skozi levo ali desno stranico? Izkazati se, da je verjetnost enaka vrednosti $u(x, y)$, kjer je u rešitev robnega problema

$$\Delta u = 0 \text{ na } \Omega$$

$$u|_{\Gamma_1} = 1 \text{ in } u|_{\Gamma_2} = 0,$$

$$\text{kjer je } \Gamma_1 = \left\{-\frac{a}{2}\right\} \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left\{\frac{a}{2}\right\} \times \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right]$$

$$\text{in } \Gamma_2 = \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left\{-\frac{b}{2}\right\} \cup \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \times \left\{\frac{b}{2}\right\}.$$

Opomba: Nalogo se lahko reši tudi z metodo separacije spremenljivk. Če je $a=b$ in $x=y=0$, je očitno $u(0,0) = 1/2$.

② Rešujemo enak problem kot v ①, (31)
le da je območje krog z radijem r .

Zanimu nas vejetnost, da delček zapusti
krog preko loka volne hrane, ki je
določen s središčnim kotom φ .

Rešiti moramo tvoj nalogo:

$$\Delta u = 0 \quad \text{na } \Omega = \dot{K}(0,0), r),$$

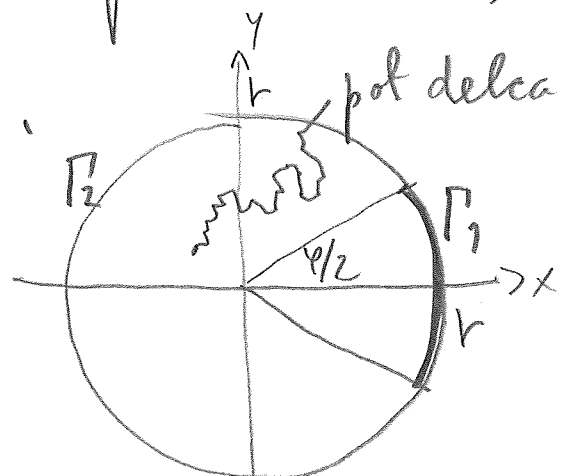
$$u|_{\Gamma_1} = 1, \quad u|_{\Gamma_2} = 0,$$

kjer je $\Gamma_1 = \{(x,y); x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha; -\varphi/2 \leq \alpha \leq \varphi/2\}$

in $\Gamma_2 = \{(x,y); x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha; \varphi/2 < \alpha < 2\pi - \varphi/2\}$.

Opomba: Analitični rezultat je viden
v primeru, ko delček začne pot v $T(0,0)$.

Torej je $u(0,0) = \frac{\varphi}{2\pi}$.



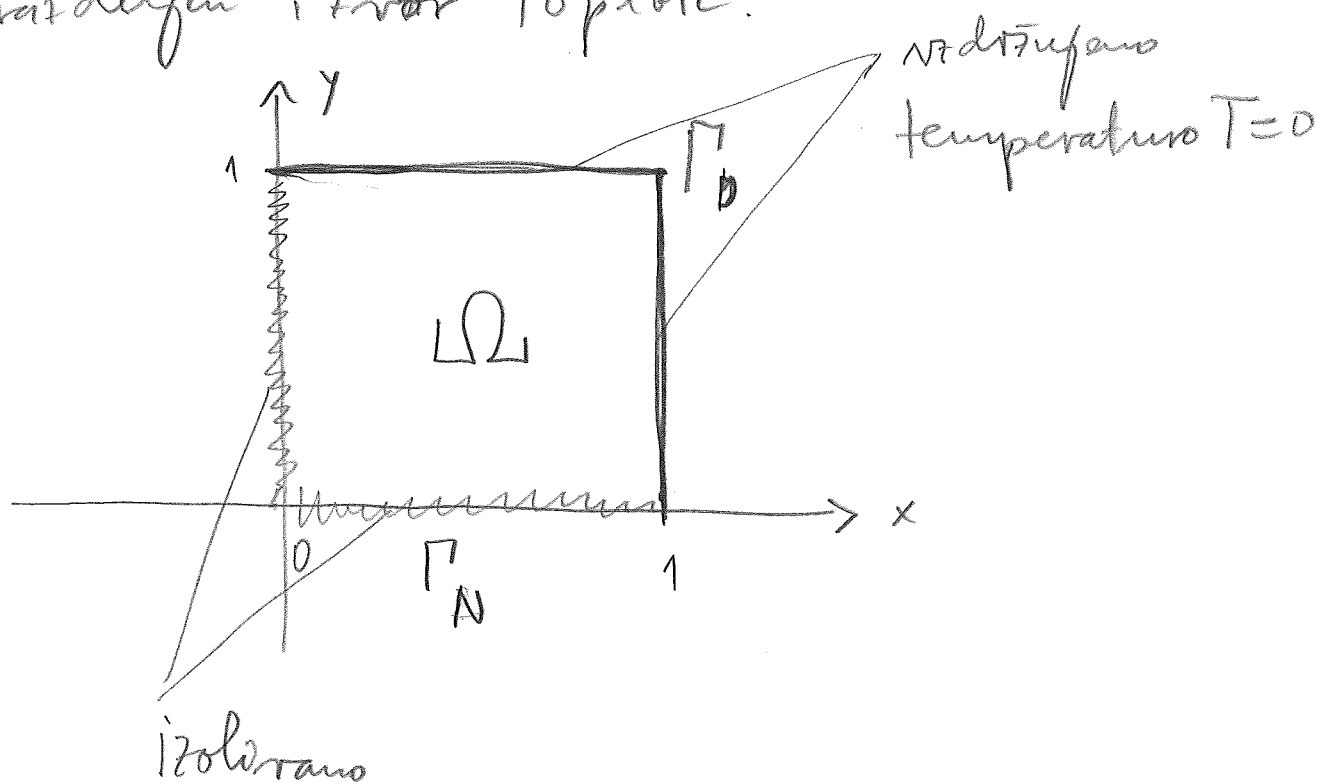
③ Išėjimo stacionario slaupe temperature, (32)
 hi ji dano kot nistev rolnego problema

$$-k \Delta T = q_0 \text{ ma } \Omega = \{(x, y) : 0 < x, y < 1\}$$

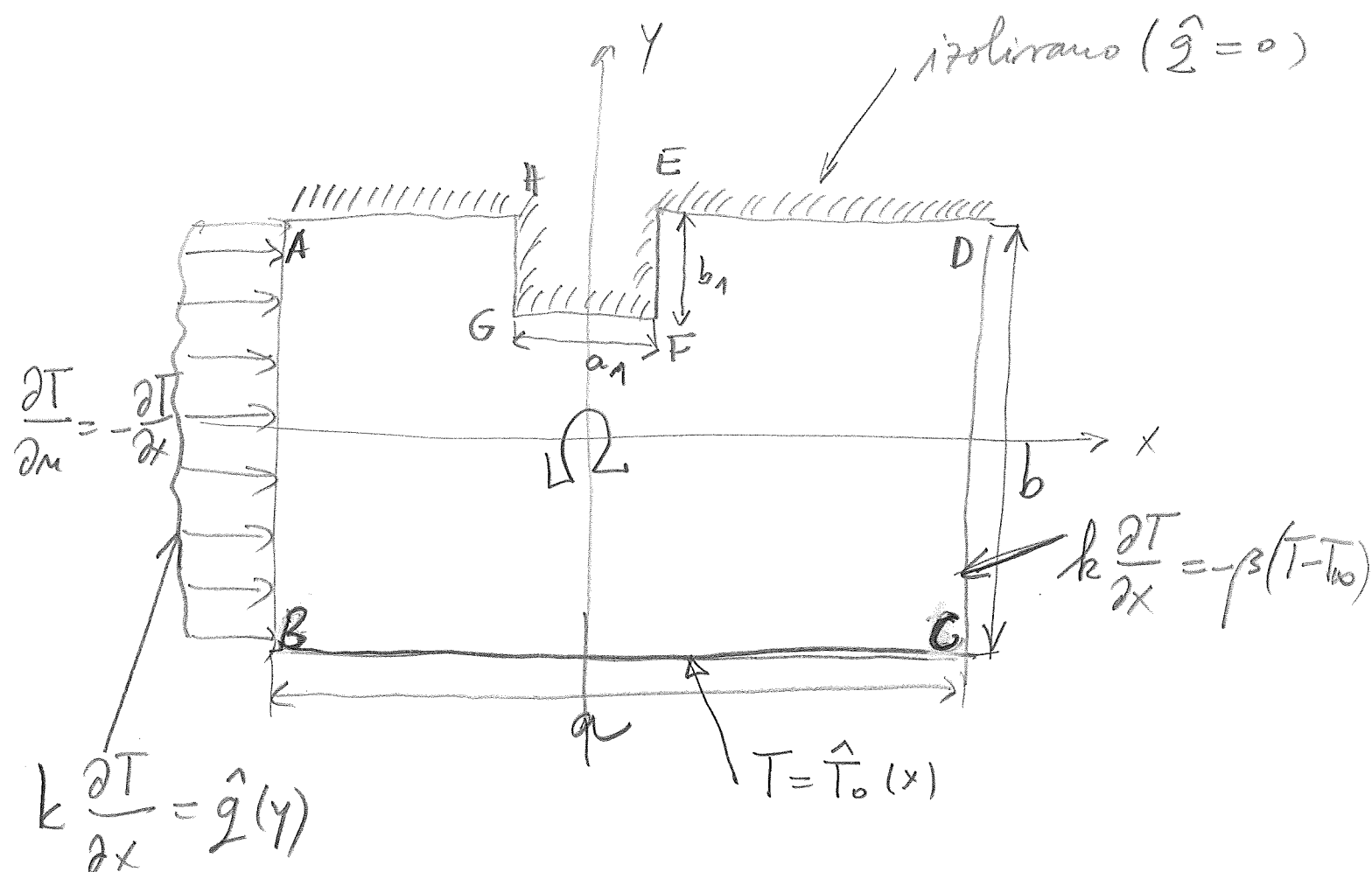
$$T = 0 \text{ ma } \Gamma_D = \{(x, y) ; x = 1, 0 \leq y \leq 1\} \\ \cup \{(x, y) ; y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ ma } \Gamma_N = \{(x, y) ; x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \\ \cup \{(x, y) ; y = 0, 0 \leq x \leq 1\},$$

Išer ji k toplotna puvrodut, q_0 eakomerno
 paratdelfen izvar toplota.



④ Išcemo stacionario parzdelinę temperatūrą (33) na skaidrėje Ω na sliki.



Rešufemo: $-k \Delta T = q_0$ na Ω

z roburimi pozgij:

$k \frac{\partial T}{\partial x} = \hat{q}(y)$ - pripisan toka toplote na $\overline{AB}$

$T = \hat{T}_0(x)$ - pripisana temperatura na $\overline{BC}$

$k \frac{\partial T}{\partial x} = -\beta(T - T_\infty)$ - konvekcija toplote na $\overline{CD}$

$\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, izolirani rob $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HA}$. T_∞ ji zimanaja temperatura

Izračun elementov mase in togostne matrike

(34)

- Zanima nas torej izračun

$$w_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j (\nabla \varphi_i)^T d\Omega$$

in

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega$$

- Integral po Ω lahko razdelimo po trikotniških triangulaciji T_e :

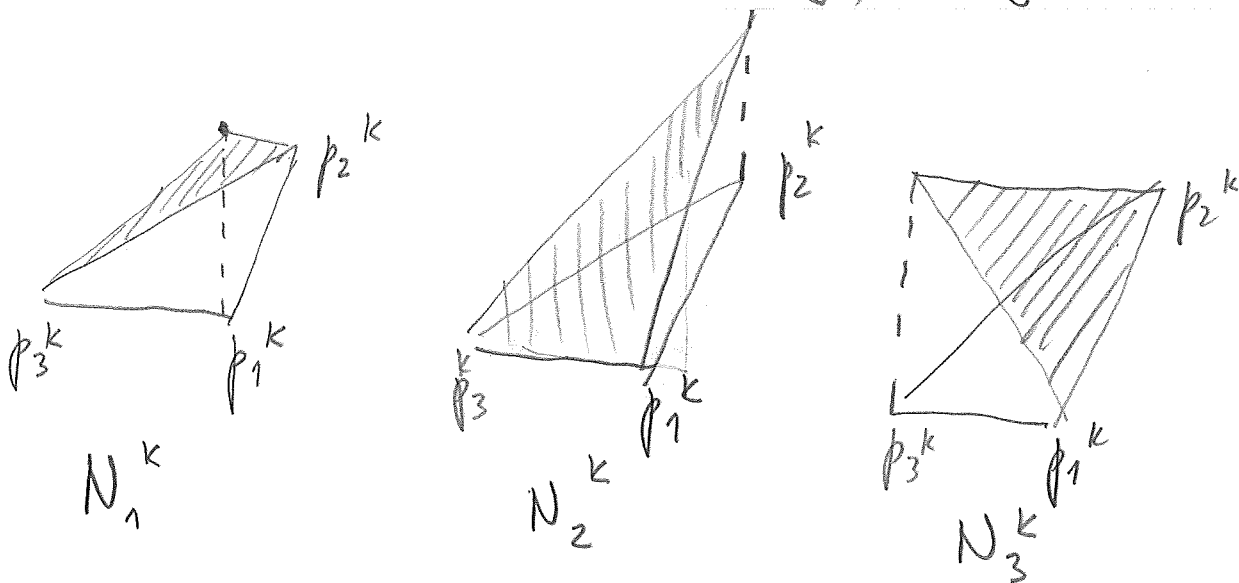
$$w_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_j (\nabla \varphi_i)^T d\Omega$$

$$= \sum_{K \in T_e} \int_K \nabla \varphi_j (\nabla \varphi_i)^T dK = \sum_K w_{ij}^K.$$

(podobno naredimo za m_{ij} , tukaj se lahko osredotočili na w_{ij}).

• Izračune poenostavimo tako, da na nekem trikotniku K definiramo tri realne funkcije. Označimo oglišča trikotnika K s p_1^k , p_2^k in p_3^k .

Definirajmo: $N_i^k \in \mathcal{P}_1$, $i = 1, 2, 3$,
 $N_i^k(p_j^k) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$.



• Opazimo: $\varphi_i|_K$ je bodisi 0, bodisi ena od funkcij N_j^k . Preizkusimo. Naj bo m_i globalni indeks lokalnega vrhoviča in trikotnika K . Potem je

$$N_i^k = \varphi_{m_i} \text{ na } K.$$

Definirajmo 3×3 matriko K^k ,

(36)

$$k_{ij}^k = \int_K \nabla N_j^k \cdot (\nabla N_i^k)^T dK, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Kasneje bomo videli, da je izraz
 k_{ij} enostaven, saj so N_i^k linearne
polinomi dveh spremenljivk na K .
Izraz teh elementov je odvisen samo
od trikotnika K !

Torej je

$$k_{ij}^k = w_{ni} w_{nj}.$$

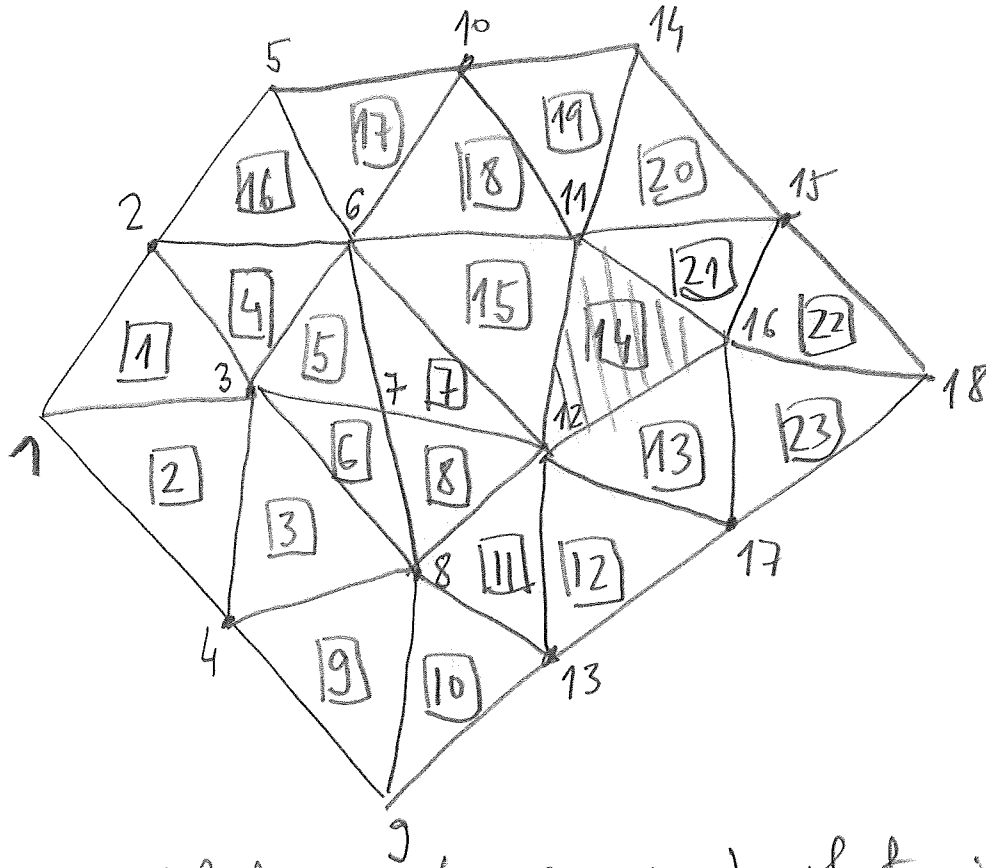
Vsi ostali elementi matrike W^k

$$W^k = (w_{ij}^k)_{i,j=1}^N \quad \text{so enaki 0, obanem}$$

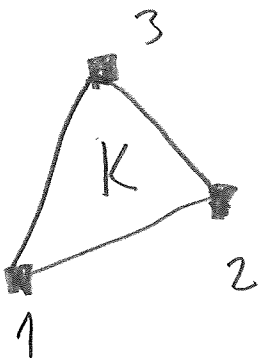
pa je

$$W = \sum_K W^k.$$

Za izračun elementov matrike potrebno (37) sterilizirani trikotniški triangulaciji (vrtuški se je potreben samo za izračunji ne vpliva na končni rezultat)



Globalno sterilizirani trikotniški



lokalno		globalno
1	$\longleftrightarrow$	12
2	$\longleftrightarrow$	16
3	$\longleftrightarrow$	11

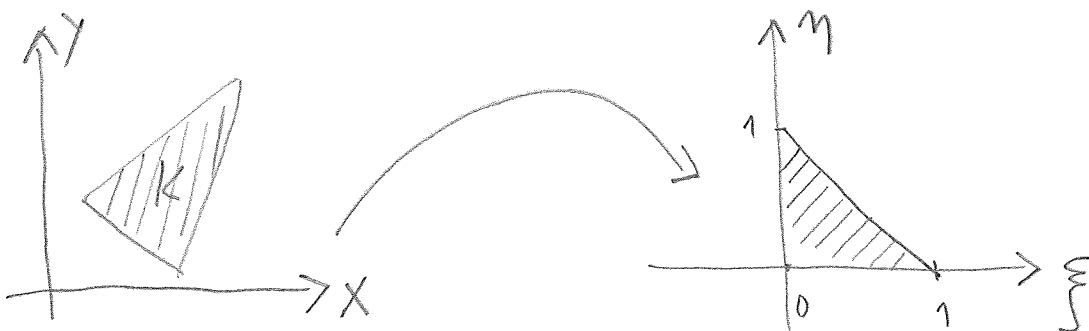
Lokalno in globalno sterilizirani 14. trikotniški.

- Kot rečeno, lahko na enak način računamo elemente mase matrice. Se več, vzporedno lahko računamo elemente obeh matrik:

$$\int_K \nabla N_j^K (\nabla N_i^K)^T dK + \rho \int_K N_j^K N_i^K dK, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Referenčni element

- Za izračun $\int_K \nabla N_j^K (\nabla N_i^K)^T dK$ in $\int_K N_j^K N_i^K dK$ potrebujemo bodisi učinkovit način za izračun N_i^K in njegovega gradienta, bodisi zaključeno obliko zgornjih integralov.
- Obje ponavadi dosežemo tako, da K preslikamo na t. i. referenčni trikotnik (referenčni element).
- Referenčni element je trikotnik z oglišči $\hat{p}_1 = (0, 0)$, $\hat{p}_2 = (1, 0)$ in $\hat{p}_3 = (0, 1)$



• Koordinati v fizičnem elementu (K) (39)
bomo označevali z x in y , koordinati
v referenčnem elementu pa z ξ in η .

• V referenčnem trikotniku definiramo
funkcije $\hat{N}_i \in \mathbb{P}_1$, $i=1,2,3$, ki zadoščajo

$$\text{zmrazi} \quad \hat{N}_i(\hat{p}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

• Eksplicitno se izražajo kot

$$\hat{N}_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \hat{N}_2(\xi, \eta) = \xi, \quad \hat{N}_3(\xi, \eta) = \eta.$$

• Če so oglišča osnovnega trikotnika K
enaka $p_i^K = (x_i, y_i)$, $i=1,2,3$, je
transformacija referenčnega trikotnika v K na
dana s predpisom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}}_{B_K} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} (1 - \xi - \eta) + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \eta.$$

Točka $\hat{p}(\xi, \eta)$ referenčnega trikotnika se torej preslika v točko $q(x, y) \in K$, ki ima baricentrične koordinate $(\xi, \eta, 1 - \xi - \eta)$ glede na p_2^k, p_3^k, p_1^k .

- Če zgomor preslikavo označimo z F_k , torej $F_k(\cdot) = B_k(\cdot) + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, je $F_k(\hat{p}_i) = p_i^k, i = 1, 2, 3$.

- Enostavno je videti, da je

$$\hat{N}_i = N_i^k \circ F_k, \quad i = 1, 2, 3,$$

oziroma $N_i^k = \hat{N}_i \circ F_k^{-1}, \quad i = 1, 2, 3.$

- Ker lahko eksplicitno izračunamo F_k^{-1} , zadnja formula predstavlja enostaven način izračuna vrednosti N_i^k .

- Pri izračunu gradientov moramo upoštevati verižno pravilo. Naj bo $\nabla = [\partial_x, \partial_y]$ in $\hat{\nabla} = [\partial_\xi, \partial_\eta]$. Potem je za poljubno funkcijo $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\hat{\nabla}(\phi \circ F_k) = ((\nabla \phi) \circ F_k) \cdot B_k.$$

(41)

- Če za ϕ izberemo $\phi = N_i^k$, dobimo

$$\hat{\nabla}(N_i^k \circ F_k) = ((\nabla N_i^k) \circ F_k) B_k$$

$$\hat{\nabla} \hat{N}_i = ((\nabla N_i^k) \circ F_k) \cdot B_k$$

$$\nabla N_i^k = (\hat{\nabla} \hat{N}_i \cdot B_k^{-1}) \circ F_k^{-1}$$

- Preprosto je videti, da je

$$B_k^{-1} = \frac{1}{\det B_k} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ -(x_2 - x_1) & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

kjer je $\det B_k = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$.
 $(|\det B_k| = 2 \operatorname{vol}(K))$.

- Gradienti funkcij $\hat{N}_i$ pa so

$$\nabla \hat{N}_1(\xi, \eta) = [-1, -1], \quad \nabla \hat{N}_2(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla \hat{N}_3(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\nabla \hat{N}_3(\xi, \eta) = [0, 1].$$

- Za izračun integralov ^{lahko} uporabimo posebna integracijska pravila:

(42)

$$(i) \int_K \phi dK \approx \frac{\text{vol}(K)}{3} (\phi(p_1^K) + \phi(p_2^K) + \phi(p_3^K))$$

$$(ii) \int_K \phi dK \approx \frac{\text{vol}(K)}{3} (\phi(m_1^K) + \phi(m_2^K) + \phi(m_3^K)),$$

ker so m_i^K središča stranic trikotnika K .

- Če je ϕ linearna funkcija, je formula (i) točna. Druga formula je še boljša, saj je točna za polinome stopnje 2.

- Torej je

$$\int_K \nabla N_j^K (\nabla N_i^K)^T dK = \text{vol}(K) \nabla N_j^K (\nabla N_i^K)^T,$$

$$\int_K N_j^K N_i^K dK = \frac{\text{vol}(K)}{3} \sum_{l=1}^3 (N_j^K N_i^K)(m_l^K).$$

Izračun integralov desnih strani

(43)

- Za določitev desne strani sistema enačb, moramo izračunati $\int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$ in $\int_{\Gamma_N} g_i \psi_i d\Gamma_N$.
- Integral $\int_{\Omega} f \psi_i d\Omega$ računamo podobno kot elemente Ω_k togostne ali masne matrice:

$$\int_{\Omega} f \psi_i d\Omega = \sum_k \int_K f \psi_i dK,$$

pri čemer za vsak trikotnik K izračunamo

$$\int_K f N_i^k dK, \quad i=1,2,3,$$

ter jih vstavimo na mesta (m_1, m_2, m_3) vektora desnih strani.

Izkaže se, da zadostna aproksimacija

$$\int_K f N_i^k dK \approx \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 f(p_j^k) \int_K N_i^k dK$$

$$= \frac{|\det B_k|}{3} \sum_{j=1}^3 f(p_j^k) \int_{\hat{K}} \hat{N}_i^k d\hat{K}$$

$\hat{K} \leftarrow$ referenčni trikot.

$$= \frac{|\det B_k|}{18} \sum_{j=1}^3 f(p_j^k)$$

(44)

• Integrali so za $i=1,2,3$ aproksimirani z istim sterilom. Lahko izberemo tudi kakšno pravilo, hi je netančnejše, a upoštevati moramo:

- pravilo mora biti dovolj netančno, da ne izgubimo dobrih lastnosti metode končnih elementov,
- pravilo mora biti dovolj enostavno, da ne izgubljamo časa z računanjem količin v visoki netančnosti, če jih potrebujemo le v nizki netančnosti.

NAPAKE RAZLIČNIH IZVOROV MORAJO
BITI ENAKEGA VELIKOSTNEGA REDA.