

Enačbe paraboličnega tipa

①

- Modelni primer je prevažanje toplote po tanki, enorazsežni palici.
- Palico umestimo tako, da je na abscisni osi z levim robom v izhodišču.
- Če je palica dolžine a , se enačba glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, a),$$

$$u(0, x) = f(x), \quad x \in [0, a],$$

$$\left. \begin{array}{l} u(t, 0) = g(t) \\ u(t, a) = h(t) \end{array} \right\} t > 0$$

- Z zamenjavo spremenljivk lahko enačbo prevedemo v brezdimenzijsko obliko: $c=1, a=1$.

• Očitnih je nekaj poglobitev:

(2)

(i) Če palica ni homogena, se enačba glasi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

(ii) Palico lahko gledamo z nehomogenim delom

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \tilde{f},$$

kjer je $\tilde{f}(t, x)$ izvor toplote.

(iii) Enačbo lahko gledamo v več prostorskih spremenljivkah:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u + f, \quad (t, x) \in (0, T) \times D,$$

kjer je $D \subseteq \mathbb{R}^d$.

Diferenčne metode

(3)

- Podobno kot pri eliptičnem primernem enačbo diskretiziramo. Naravno je izbrati simetrično drugo diferenco, videli pa bomo, da v 1D enačbi simetrična diferenca res dobra izbira (ker to teče le v eno smer).

- Izberimo mrežo za modelno enačbo v eni dimenziji:

$$t_n = n \delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \delta t := \frac{T}{N},$$

$$x_j = j \delta x, \quad j = 0, 1, \dots, J+1, \quad \delta x := \frac{a}{J+1}$$

- Označimo z $u_j^n \approx u(t_n, x_j)$ približek za točno rešitev v točki (t_n, x_j) .

- Izberimo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_n, x_j) = \frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1}))}{\delta x^2} + \mathcal{O}(\delta x^2)$$

in

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_{n-1}, x_j)}{2\delta t} + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (4)$$

Zgornji aproksimaciji vstavimo v enačbo in dobimo

$$u_j^{n+1} = 2\lambda (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + u_j^{n-1},$$

kjer je $\lambda := c^2 \frac{\delta t}{\delta x^2}$

Definirajmo vektor meritev na n -tem časovnem nivoju kot

$u^n := (u_j^n)_{j=1}^J$, dobimo sistem diferencialnih enačb

$$u^{n+1} = A u^n + u^{n-1}.$$

Lahko ga prepišemo v obliko, ki povezuje le dva vektora, vendar drugne dolžine:

$$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^n \\ u^{n-1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

- Računanje novih približkov (približkov na novem časovnem nivoju) je v resnici nemomirana potenčna metoda za matriko

$$T = \begin{bmatrix} A & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinanta te matrike je ± 1 , saj je $T = \text{perm}(T')$, $T' = \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix}$ in perm označuje ustrezno permutacijo stolpcov matrike T' .

Toda potem je $\rho(T) > 1$, saj ni nobena lastna vrednost matrike T na enotski sferi (dokažite!).

- Simetrično aproksimacija časovnega (6) odvoda zato zmanjšano 2. vrsto raneho:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_j) = \frac{u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)}{\delta t} + O(\delta t)$$

- Glede na to, ali uporabimo pramo ali obratno diferenco, ločimo dve (Eulerjevi) metodi

Eksplisitna shema

- Pri tej metodi izberemo

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} = c^2 \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\delta x^2},$$

kar prepišemo v

$$u_j^{n+1} = \lambda u_{j-1}^n + (1 - 2\lambda) u_j^n + \lambda u_{j+1}^n,$$

$$\lambda := c^2 \frac{\delta t}{\delta x^2}$$

- Koeficient λ , ki je razmerje $\delta t / \delta x^2$ pomnoženo s konstanto c , igra pomembno vlogo pri konvergenci.

Razmerje $\delta t / \delta x^2$ imenujemo Courantovo število.

Geometrijsko Courantovo število pomeni razdalja časovnega koraka v primerjavi z redom prostorskega koraka.

Pri studiju lastnosti numeričnih shem bomo ves čas predpostavljali, da ostaja razmerje konstantno, četudi greda koraka v času in prostoru proti 0.

- Začetni pogoji v diskretni obliki zapisemo kot

$$u_j^0 = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

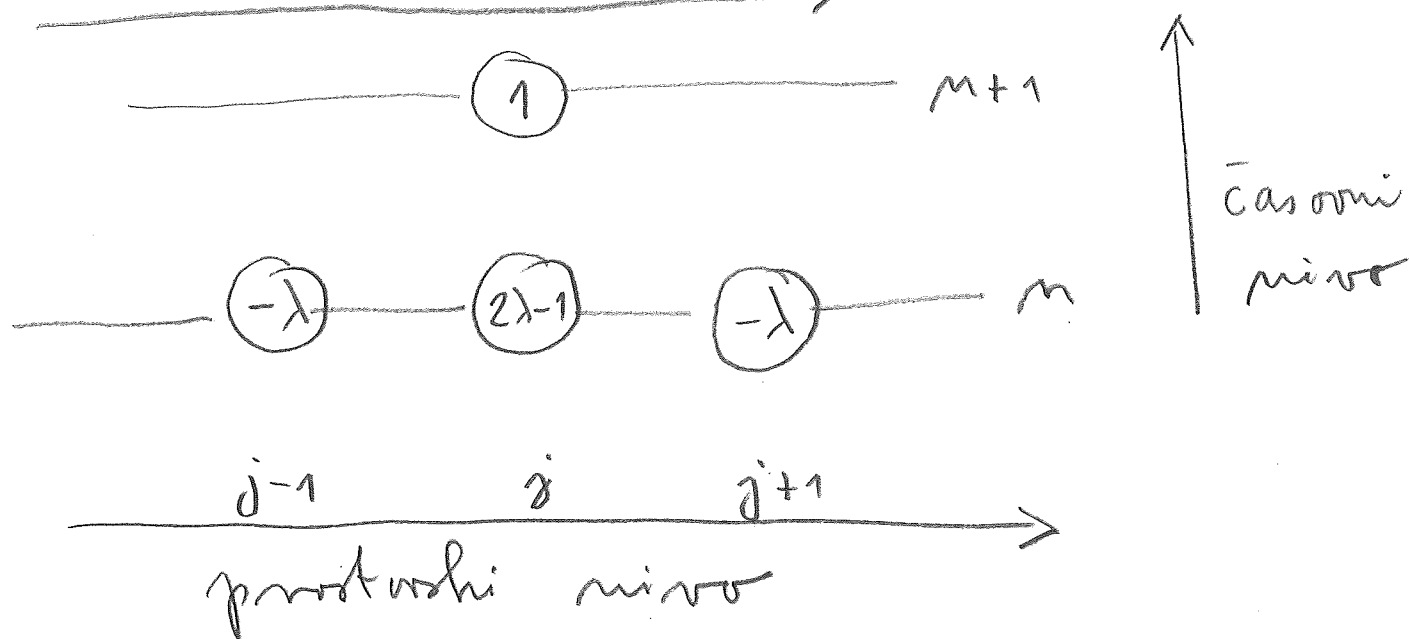
robnimi pa kot

$$u_0^n = g_n$$

$$u_{J+1}^n = h_n$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

- Eksplicitna shema lahko simbolizira (8) predstavimo takole (vse spremenljivke na isti strani enačb):



- Shema je zelo preprosta, privlačna za implementacijo, vendar, kot bomo videli, neekonomična.

- Lokalna napaka je sestavljena iz dveh delov, časovnega in prostorskega:

$$\tau_j^m = \left(\frac{\partial \mu}{\partial t}(t_m, x_j) - \frac{\mu(t_{m+1}, x_j) - \mu(t_m, x_j)}{\delta t} \right) - \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}(t_m, x_j) - c^2 \frac{\mu(t_m, x_{j-1}) - 2\mu(t_m, x_j) + \mu(t_m, x_{j+1}))}{\delta x^2} \right)$$

$$= \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_n, x_j) + O(\delta t^2 + \delta x^2) \quad (9)$$

• Označimo τ u točno rešeno enačbu
 in $e_j^m := u_j^m - u(t_n, x_j)$ globalno
 napako v (t_n, x_j)

• Prejeto račun privede do

$$\begin{aligned} & - (u(t_{n+1}, x_j) - u(t_n, x_j)) \\ & + \lambda (u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1})) \\ & = \delta t \tau_j^m \end{aligned}$$

(pri tem upoštevamo, da je u rešeno
 modelne enačbe).

• Za globalno napako torej velja

$$\begin{aligned} e_j^{m+1} &= \lambda (e_{j-1}^m + e_{j+1}^m) + (1-2\lambda) e_j^m + \delta t \tau_j^m \\ j &= 1, 2, \dots, J; \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

- Globalna napaka je enaka nič (oz. je enaka omorni zaokrožitveni napaki) pri $t=0$ in $x=0, x=a$. (10)

Izrek: Naj bo $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ in Courantovo število konstantno. Tedaj je eksplisitna metoda konvergentna,

$$\max_{j,m} |e_j^m| = O(\delta x^2)$$

Dokaz: Iz predpostavke izreka sledi

$$\delta t \leq \frac{1}{2c^2} \delta x^2, \quad \frac{\delta t}{\delta x^2} = \text{konstanta. (*)}$$

Naj bo $e^m := (e_j^m)_{j=1}^J$ vektor globalnih napak na m -tem časovnem nivoju.

Iz zgoraj izpeljane zveze za globalno napako, reda lokalne napake in (*) sledi:

$$|e_j^{n+1}| \leq \lambda (|e_{j-1}^n| + |e_{j+1}^n|) + (1-2\lambda) |e_j^n| + \delta t |\tau_j^n|$$

$$\leq 2\lambda \|e^n\|_\infty + (1-2\lambda) \|e^n\|_\infty$$

$$+ \delta t \mathcal{O}(\delta x^2) = \|e^n\|_\infty + \delta t \mathcal{O}(\delta x^2)$$

- Druha stran ocene je neodvisna od j ,
 Ampa je izpolnjena za vsak j , torej tudi
 za indeks j , kjer je dožeten maksimum:

$$\|e^{n+1}\|_\infty \leq \|e^n\|_\infty + \delta t \mathcal{O}(\delta x^2).$$

- Oceno iteriramo in dobimo

$$\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty + n \delta t \mathcal{O}(\delta x^2)$$

$$= \|e^0\|_\infty + T \cdot \mathcal{O}(\delta x^2) = \mathcal{O}(\delta x^2),$$

saj je $\|e^0\|_\infty \approx 0$ (do zaokrožitvene napake)

- Zadnji izrek podaja zadosten pogoj za konvergenco. V resnici je tudi potreben. Brez dokaza podajmo tale izrek:

Izrek: Če je $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$, eksplisitna metoda v splošnem ni konvergentna.

Implicitna shema

- Po tej shemi uporabimo obratno diferenco za aproksimacijo v časovni smeri

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\delta t} = \kappa^2 \frac{u_{j-1}^{m+1} - 2u_j^{m+1} + u_{j+1}^{m+1}}{\delta x^2}$$

Obtoma

$$-\lambda u_{j-1}^{m+1} + (1 - 2\lambda) u_j^{m+1} - \lambda u_{j+1}^{m+1} = u_j^m$$

- Za vsak časovni sloj je treba rešiti sistem linearnih enačb

$$(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{B}) \begin{bmatrix} \mu_1^{m+1} \\ \mu_2^{m+1} \\ \vdots \\ \mu_J^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1^m \\ \mu_2^m \\ \vdots \\ \mu_J^m \end{bmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} g_{m+1} \\ h_{m+1} \end{bmatrix}}_{\text{robni pogoji}}, \quad (13)$$

kjer je

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & 1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{J \times J}$$

• Matrika $\mathbf{B}$ je simetrična, triidiagonalna in pozitivno definitna.

Rešujemo ga z eliminacijo brez pivotiranja v linearnem času $\mathcal{O}(J)$.

Tako je kvaša implicitne metode le za konstantni faktor dražji od kvaše implicitne metode.

- Implicitna metoda ima precej
lepšo konvergenčno lastnost:

(14)

Izrek: Naj ponovno $e_j^n := u_j^n - u(t_n, x_j)$

označuje globalno napako implicitne
scheme. Potem je slednja konvergentna

za vsak $\lambda > 0$ in je

$$\max_{j,n} |e_j^n| = O(\delta t + \delta x^2).$$

Dokaz: Sledimo dokazu v primeru
eksplisitne scheme za globalno
napako tovrst izpeljemo

$$\begin{aligned} & -\lambda e_{j-1}^{n+1} + (1+2\lambda) e_j^{n+1} - \lambda e_{j+1}^{n+1} \\ & = e_j^n + \delta t \tau_j^{n+1}. \end{aligned}$$

Torej lahko ocenimo

$$\begin{aligned} (1+2\lambda) |e_j^{n+1}| & \leq \lambda |e_{j-1}^{n+1}| + \lambda |e_{j+1}^{n+1}| \\ & + |e_j^n| + \delta t |\tau_j^{n+1}| \end{aligned}$$

$$\leq 2\lambda \|e^{n+1}\|_{\infty} + \|e^n\|_{\infty} + \delta t \mathcal{O}(\delta t + \delta x^2)$$

Ker je leva stran neodvisna od j , je

trajno

$$(1+2\lambda) \|e^{n+1}\|_{\infty} \leq 2\lambda \|e^{n+1}\|_{\infty} + \|e^n\|_{\infty} + \delta t \mathcal{O}(\delta t + \delta x^2)$$

ni od tod

$$\|e^n\|_{\infty} \leq \|e^0\|_{\infty} + T \mathcal{O}(\delta t + \delta x^2),$$

kjer je po privzetku $\|e^0\|_{\infty} \approx 0$. ■

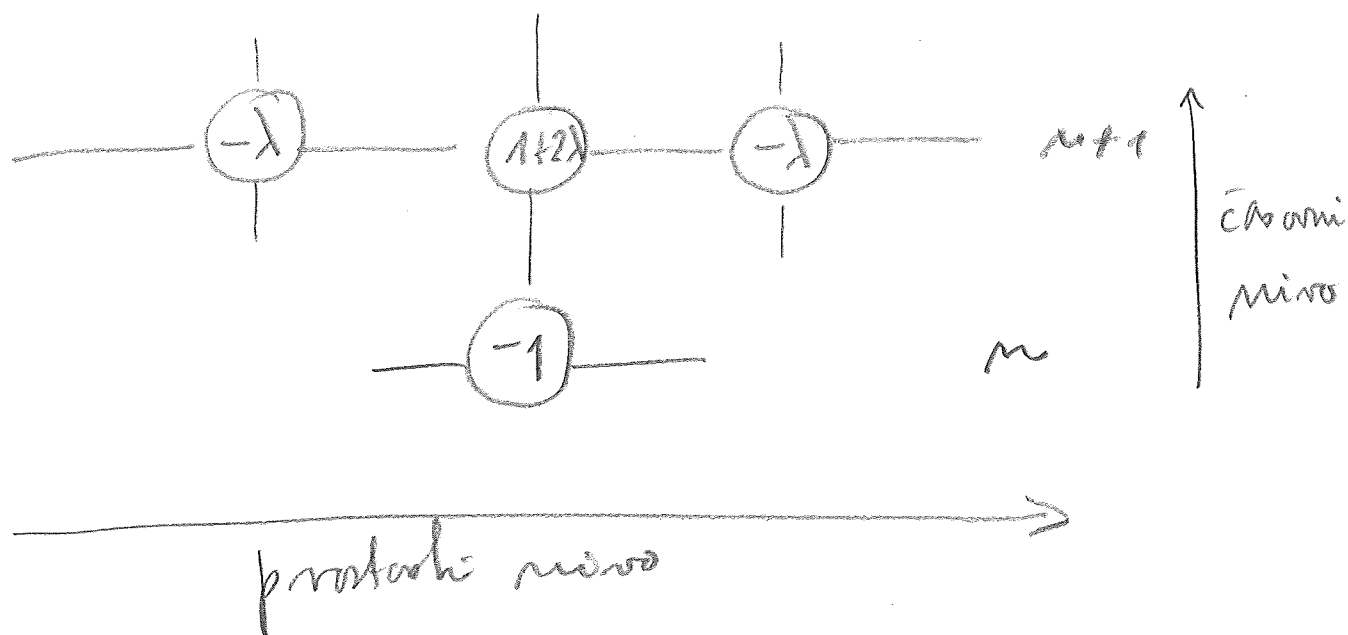
Metoda je nicer konvergentna za vsak $\lambda > 0$, toda red napake je $\mathcal{O}(\delta t + \delta x^2)$,

kar postaja omejitel velikosti
časovnega koraka.

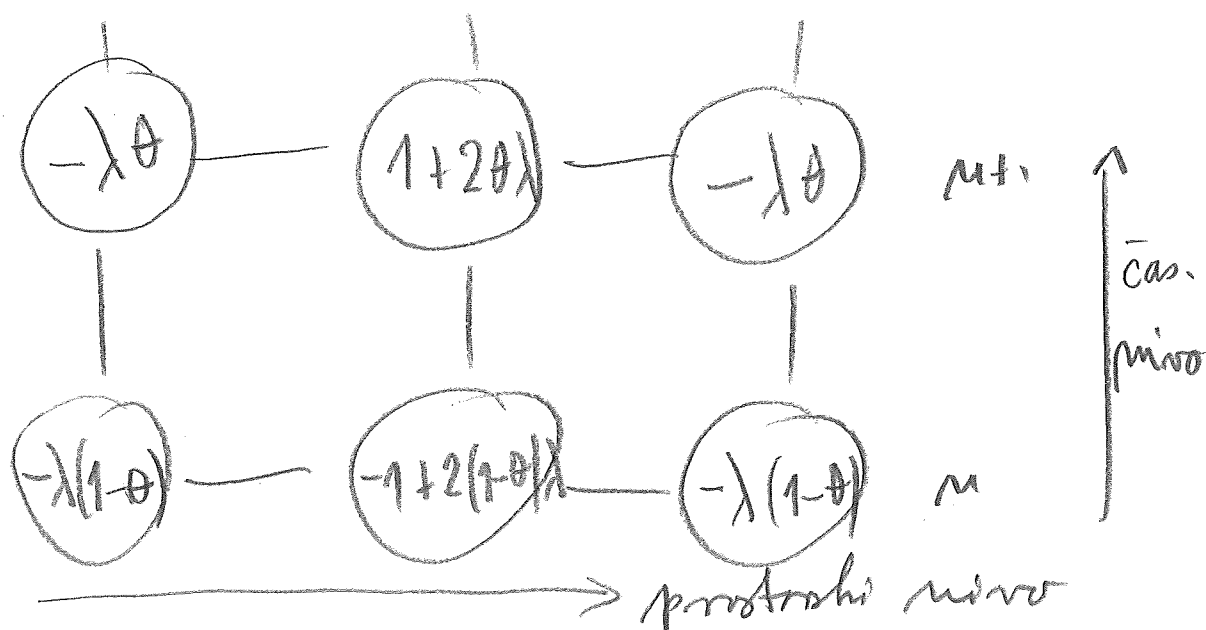
• Poskusimo izboljšati s konvergentno
kombinacijo obeh metod,
explicitne in implicitne.

• Shema implicitne metode je

(16)



• Shema konvencijne kombinacije eksplicitne metode (parametrom α $1-\theta$) i implicitne metode (parametrom θ , $0 \leq \theta \leq 1$):



- Implicitna metoda je konvergentna za $\text{vak. } \lambda > 0$, toda red globalne napake $O(\delta t + \delta x^2)$ postaja omejen veliki kroka v časovi smeri.
- Idea: kombinacija eksplisitne in implicitne metode.
- Enače eksplisitne metode pomnožimo z $1-\theta$, implicitno del pa z θ in seštejemo:

$$\begin{aligned}
 & -\theta \lambda u_{j-1}^{n+1} + (1+2\theta\lambda) u_j^{n+1} - \theta \lambda u_{j+1}^{n+1} \\
 & = (1-\theta) \lambda u_{j-1}^n + (1-2(1-\theta)\lambda) u_j^n + (1-\theta) \lambda u_{j+1}^n
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \dots, J, \quad n = 0, 1, \dots$$

- Enače lahko zapišemo v matrični obliki po časovnih slojih $u^n = (u_j^n)_{j=1}^J$:

$$\begin{aligned}
 & (I + \theta \lambda B) u^{n+1} \\
 & = (I - (1-\theta) \lambda B) u^n + \lambda (\theta b^{n+1} + (1-\theta) b^n),
 \end{aligned}$$

hjer je

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{J \times J},$$

18

$$b^n = [g_n, 0, \dots, 0, h_n]^T \in \mathbb{R}^J \quad (\text{robni pogoji})$$

• Kako izbrati θ , da bo lokalna napaka minimalna?

• Tanine nas razlika med dif. operativem in njegovo diskretno aproksimacijo na gladkih funkcijah na N točki (t_{m+1}, x_j) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t_{m+1}, x_j) &= \frac{u(t_{m+1}, x_j) - u(t_m, x_j)}{\delta t} \\ &= \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t_{m+1}, x_j) + O(\delta t^2). \end{aligned}$$

Pratowski del pa postane:

$$- \kappa^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (t_{n+1}, x_j) \right)$$

(19)

$$- \theta \left(\frac{u(t_{n+1}, x_{j-1}) - 2u(t_{n+1}, x_j) + u(t_{n+1}, x_{j+1}))}{\delta x^2} \right)$$

$$- (1-\theta) \frac{u(t_n, x_{j-1}) - 2u(t_n, x_j) + u(t_n, x_{j+1}))}{\delta x^2}$$

$$= - (1-\theta) \delta t c^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} (t_{n+1}, x_j) = O(\delta t^2 + \delta x^2)$$

• Če je u točna rešitev modelne enačbe, je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \kappa^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}$$

• Slednje upostevamo v formuli za lokalno napako

$$\tau_j^{n+1} = \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (t_{n+1}, x_j) - (1-\theta) \delta t \kappa^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} (t_{n+1}, x_j) + O(\delta t^2 + \delta x^2)$$

in dobimo

$$\tau_j^{n+1} = \delta t \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (t_{n+1}, x_j) + O(\delta t^2 + \delta x^2)$$

- Sami izbira $\theta = \frac{1}{2}$ da lokalno napaka (20) reda $O(\delta t^2 + \delta x^2)$. Pri tej izbiri se metoda imenuje Crank-Nicolsonova in se najpogostejše uporablja.

Izrek: Za $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ sestavljena metoda konvergira neodvisno od izbire razmerna λ .

Dokaz: Naj bo $e_j^m := u_j^m - u(t_m, x_j)$ globalna napaka v (t_m, x_j) ter

$$e^m := (e_j^m)_{j=1}^J, \quad \tau^m = (\tau_j^m)_{j=1}^J$$

Podobno kot v dokazu konvergence implicitne metode izpeljemo

$$(\mathbf{I} + \theta \lambda B) e^{m+1} = (\mathbf{I} - (1-\theta) \lambda B) e^m + \delta t \tau^{m+1}$$

Matrica $(\mathbf{I} + \theta \lambda B)$ je obrnljiva (dokažite), zato lahko zgornjo enačbo preoblikujemo v

$$e^{n+1} = C e^n + \delta t \eta^{n+1},$$

(21)

kjer je $C = (I + \theta \lambda B)^{-1} (I - (1-\theta) \lambda B)$ in

$$\eta^{n+1} = (1 + \theta \lambda B)^{-1} \tau^{n+1}$$

Z iteriranjem dobimo $e^n = C^n e^0 + \delta t \sum_{\nu=1}^n C^{n-\nu} \eta^\nu$

Za stabilnost zadošča, da je C konvergentna.

Sprejmemo κ lastnih parov matrike B :

$$(\beta_p, \mu_p) = \left(4 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{p}{J+1} \right), \left(\sin \frac{p \pi}{J+1} \right)_{p=1}^J \right)$$

$$p = 1, 2, \dots, J.$$

Od tod s preprostim računanjem izpeljemo

$$\begin{aligned} C \mu_p &= (I + \theta \lambda B)^{-1} (I - (1-\theta) \lambda B) \mu_p \\ &= \frac{1 - (1-\theta) \lambda \beta_p}{1 + \theta \lambda \beta_p} \mu_p \end{aligned}$$

Torej so lastne vrednosti matrike C enake

$$1 - \frac{\lambda \beta_p}{1 + \theta \lambda \beta_p}, \quad p = 1, 2, \dots, J.$$

Matritsa C je taty konvergentna, če je (22)

$$-1 < 1 - \frac{\lambda \beta_p}{1 + \theta \lambda \beta_p} < 1,$$

Ker je $\beta_p > 0$, ostane samo še neenakost

$$(1 - 2\theta) \lambda \beta_p < 2, \quad p = 1, 2, \dots, J,$$

ki pa je vedno izpolnjena, če je $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Za $\theta \geq \frac{1}{2}$ je taty $\rho(C) < 1$, zato obstajata vektorska norma $\|\cdot\|$ in pripadajoča operatorska norma $\|\cdot\|$, v kateri je $\|C\| \leq 1$.

Sedaj lahko ocenimo

$$e^n = C^n e^0 + \delta t \sum_{\nu=1}^n C^{n-\nu} \gamma^\nu$$

v tej normi:

$$\begin{aligned} \|e^n\| &\leq \|C\|^n \|e^0\| + \delta t \sum_{\nu=1}^n \|C\|^{n-\nu} \|\gamma^\nu\| \\ &\leq \|C\|^n \|e^0\| + \delta t \max_{1 \leq \nu \leq n} \|\gamma^\nu\| \sum_{\nu=1}^n \|C\|^{n-\nu} \end{aligned}$$

$$\leq \|e^0\| + \delta t \, m \max_{1 \leq \nu \leq m} \|y^\nu\|$$

$$\leq \|e^0\| + T \max_{1 \leq \nu \leq m} \|y^\nu\|$$

To pa se dokazuje konvergenco, saj je

$$\|y^\nu\| \leq \|(1 + \theta \lambda B)^{-1}\| \|z^\nu\|$$

$$= O\left(\delta t \left(\theta - \frac{1}{2}\right) + \delta t^2 + \tau x^2\right) \text{ in}$$

$$\|e^0\| \approx 0 \text{ (do zaokrožitvene napake)}. \quad \blacksquare$$

• Iz dokaza lahko razberemo, kaj moramo zahtevati za stabilnost, če je $\theta < \frac{1}{2}$.

• Pogoj lahko napišemo razmeroma 1.

Ker je $\beta_p < 4$, je dovolj zahtevati

$$\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}.$$

Enačba v dveh prostorskih razsežnostih (24)

• Rešujemo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \Delta u, \quad (t, \underline{x}) \in (0, T) \times D,$$

kjer je $D := (0, a) \times (0, b)$.

Na robu imamo Dirichletove pogoje

$$u(t, \underline{x}) = h(t, \underline{x}), \quad t > 0, \underline{x} \in \partial D,$$

v začetnem času pa

$$u(0, \underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in D.$$

• Enačbo spet diskretiziramo z diferenčno metodo, kjer pišemo $\underline{x} = (x, y)$.

• Za priložbi del uporabimo pristop kot pri diskretizaciji eliptične enačbe, za časovni del pa izberemo enako delitev kot pri tamni palici:

$$t_n = n \delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad \delta t = \frac{T}{N}$$

$$x_j = j \delta x, \quad j = 0, 1, \dots, J+1, \quad \delta x = \frac{a}{J+1}$$

$$y_k = k \delta y, \quad k = 0, 1, \dots, K+1, \quad \delta y = \frac{b}{K+1}$$

- Izpeljava eksplcitne metode sledi neposredno:

(25)

$$u_{jk}^{n+1} = u_{jk}^n + \gamma_x (u_{j-1,k}^n - 2u_{jk}^n + u_{j+1,k}^n) + \gamma_y (u_{j,k-1}^n - 2u_{jk}^n + u_{j,k+1}^n)$$

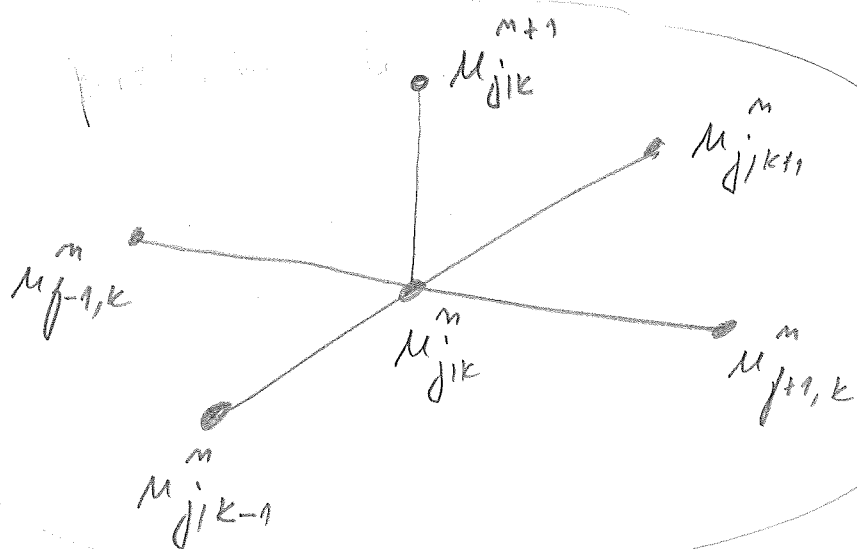
$$j = 1, 2, \dots, J; \quad k = 1, 2, \dots, K; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Konstanti γ_x in γ_y sta definirani kot

$$\gamma_x = c^2 \frac{\delta t}{\delta x^2}, \quad \gamma_y = c^2 \frac{\delta t}{\delta y^2}$$

- Sumiramo, da je stabilnost metode funkcija odvisna od γ_x in γ_y .

- Izhajate iz: $\gamma_x + \gamma_y \leq 1/2$



- Podobno kot v eri dimenziji lahko tudi tukaj namesto eksplisitne sheme uporabimo implicitno.
- Toda implicitna shema v tem primeru na našem knahtu pomeni reševanje eliptičnega problema, mohlje Poissonove enačbe.
- Poiskati želimo učinkovito pot, t. i. ADI (alternating direction implicit, (Peaceman, Rachford))
- Osnovo vodilo je učinkovito reševanje tridiagonalnih, diagonalno dominantnih sistemov linearnih enačb.
- Časovni korak izračuna naredimo v dveh delih: s polovčnim korakom implicitno v eri smeri, nato enako še v drugo smer (alternating direction implicit).

Za $t_{n+1/2} = (n + \frac{1}{2}) \Delta t$ dobimo približek (27)

$$u_{j|k}^{n+1/2} - \frac{1}{2} \nu_x (u_{j-1,k}^{n+1/2} - 2u_{j|k}^{n+1/2} + u_{j+1,k}^{n+1/2})$$

$$= u_{j|k}^n + \frac{1}{2} \nu_y (u_{j|k-1}^n - 2u_{j|k}^n + u_{j|k+1}^n)$$

$$j = 1, 2, \dots, J; \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

za končni časovi sloj t_{n+1} pa

$$u_{j|k}^{n+1} - \frac{1}{2} \nu_y (u_{j|k-1}^{n+1} - 2u_{j|k}^{n+1} + u_{j|k+1}^{n+1})$$

$$= u_{j|k}^{n+1/2} + \frac{1}{2} \nu_x (u_{j-1,k}^{n+1/2} - 2u_{j|k}^{n+1/2} + u_{j+1,k}^{n+1/2})$$

$$k = 1, 2, \dots, K, \quad j = 1, 2, \dots, J.$$

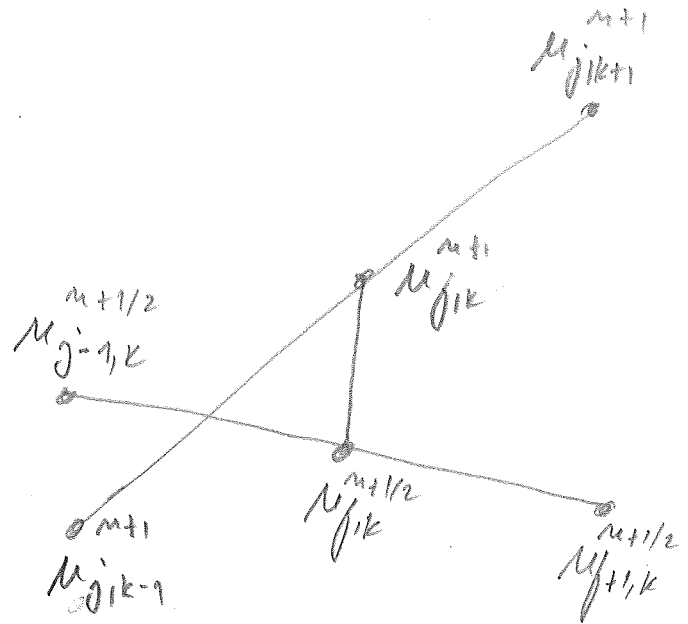
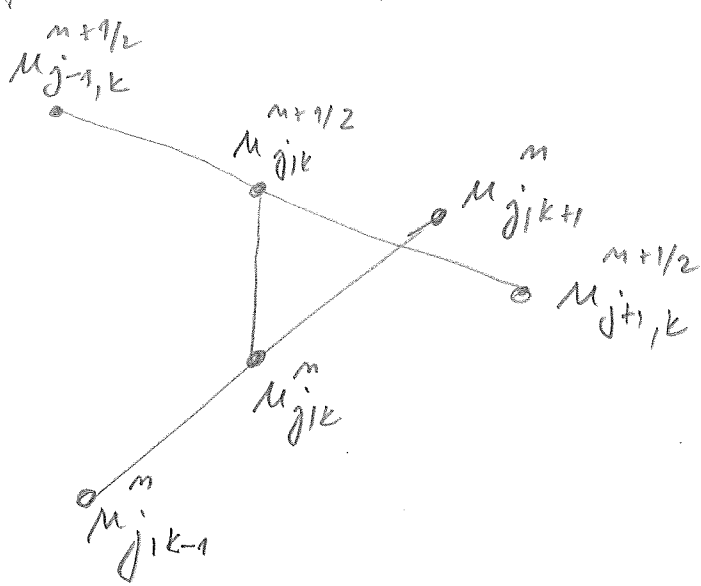
• Na začetku neznanka $u_{j|k}^0$ določajo začetne pogoje. Na robu $j=0$, $j=J+1$ in $k=0$, $k=K+1$ pa so vrednosti določene z robnimi pogoji.

• Na prvem (delnem) koraku rešujemo K trikotniških, strogo diag. dom. sistemov velikosti J , na drugem pa

1) fiksnih sistemov veljivosti K .

(28)

Celoten kvadrant je torej linearno časovno zahtevnosti v številu prostorskih smerih.



Izrek: ADI metoda je stabilna neodvisno od korakov v časih in prostorskih smereh.

Z nekaj numeričnega računanja in s pomočjo programov za simbolično računanje izpeljemo, da je lokalna napaka ADI metode enaka

$$O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Reševanje modelne enačbe s FEM

(29)

- Rešujemo enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_{\underline{x}} u + f, \quad (t, \underline{x}) \in (0, \infty) \times \Omega,$$

$$u(\underline{x}, 0) = u_0, \quad \underline{x} \in \Omega,$$

$$u(\underline{x}, t) = g, \quad \underline{x} \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t > 0.$$

(omejimo se samo na Dirichletove robne pogoje)

- Tukaj je Ω lahko precej bolj
zrkljeno območje kot samo pravokotnik.
- Zato bomo uporabili metodo končnih
elementov.
- Ogledamo si diskretizacijo s prostorsko
in časovno smer (forward Euler)

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$$

$\Delta t = t_{n+1} - t_n$: časovni korak
med n -tem in $(n+1)$ -tim intervalom.

• Za razliko od diferenčne metode, (30)
lahko tukaj časovi koraki δ_n prilagajamo
glede na obnašanje numerične rešitve.

• Diskretizacija se glasi

$$\frac{\mu_{n+1}^{m+1} - \mu^n}{\delta_n} \equiv \Delta \mu^n + f^n, \quad \text{kjer je}$$

μ^n numerični približek za rešitev na
 n -tem časovnem nivoju $\mu^n \approx \mu(t_n, \cdot)$
: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

• V eksplisitni obliki torej

$$\mu^{n+1} = \mu^n + \delta_n \Delta \mu^n + \delta_n f^n$$

• Spet uporabimo Greenovo formulo:

$$\int_{\Omega} (\Delta \mu^n) v \, d\Omega \neq \int_{\Omega} (\nabla \mu^n)^T (\nabla v)^T \, d\Omega$$

$$= \int_{\Gamma} (\partial_n \mu^n) v \, d\Gamma$$

- Če mi Neumannovi pogoji, se zadrži identiteta prepise v

(31)

$$\delta_n \int_{\Omega} (\Delta u^n) v \, d\Omega + \delta_n \int_{\Omega} \nabla u^n \cdot (\nabla v)^T \, d\Omega = 0$$

- Upoštevamo, da je

$$\delta_n \Delta u^n = u^{n+1} - u^n - \delta_n f^n$$

in dobimo

$$\int_{\Omega} u^{n+1} v \, d\Omega = \int_{\Omega} u^n v \, d\Omega$$

$$- \delta_n \int_{\Omega} \nabla u^n \cdot (\nabla v)^T \, d\Omega + \delta_n \int_{\Omega} f^n v \, d\Omega,$$

za $v=0$ na Γ .

• Problem se v sebi obliki glavi (32)

• Poiščite zaporedje u^n , pri čemer je u^0 dana začetna vrednost, tako da je

$$u^{n+1} \in H^1(\Omega),$$

$$u^{n+1} = g^{n+1} \text{ na } \Gamma,$$

$$\int_{\Omega} u^{n+1} v \, d\Omega = \int_{\Omega} u^n v \, d\Omega - \sum_{\Omega} \int_{\partial\Omega} (\nabla u^n) \cdot \nu \, d\sigma + \sum_{\Omega} \int_{\Omega} f^n v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

• Vsakega od takih problema rešujemo na podoben način kot smo opisali pri metodah za reševanje eliptičnega problema s FEM.