

ANALIZA 1
26. domača naloga

(1) Izračunaj prostornino vrtenine, ki nastane pri vrtenju

(a) $f(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + x + 1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}}$ na intervalu $[2, 2\sqrt{3}]$ okrog abscisne osi.

(b) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$, $x \geq 0$ okrog abscisne osi.

(c) krivulje $x = 1 - \cos t$, $y = t - \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$ okoli njene navpične tangente.

(a) $\pi \ln(4\sqrt{3} - 2) + \frac{\pi^2}{8}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) π^2

(2) Naj bo dana krožnica $K \subset \mathbb{R}^2$ s središčem v izhodišču in polmerom $a > 0$. Za vsako točko $M \in K$ naj bo P pravokotna projekcija M na abscisno os in Q pravokotna projekcija točke P na premico skozi točko M in izhodišče. Izračunaj ploščino območja, ki ga omejuje krivulja L !

$\frac{3\pi a^2}{8}$

(3) Krivulja P naj bo dana z enačbo $y^2 = \frac{3}{2}x$. Za vsako točko $M \in P \setminus \{(0,0)\}$ naj bo A_M tista točka na poltraku iz točke $(0,0)$ skozi M , za katero je produkt oddaljenosti točke M od izhodišča in oddaljenosti A_M od izhodišča enak 1. Izračunaj ploščino lika med krivuljama P in K .

$\frac{7\sqrt{3}}{12} - \frac{2\pi}{9}$

(4) Naj bo $a > 0$. Izračunaj dolžino dela krivulje

(a) $f(x) = \ln(1 - x^2)$ nad intervalom $[0, \frac{1}{2}]$.

(b) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ med dvema zaporednima točkama, ki ležita na abscisni osi.

(c) $r = e^{a\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, znotraj kroga $x^2 + y^2 \leq 1$.

(a) $\ln 3 - \frac{1}{2}$ (b) $8a$ (c) $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$

(5) Krivulja K je podana parametrično z

$$x(t) = 4 + 2 \ln t, \quad y(t) = t + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

(a) Določi točko T na krivulji K , ki je najbližja abscisni osi.

(b) Izračunaj dolžino krivulje K med točko T in točko, kjer krivulja seka premico $x = 8$.

(a) $T(4, 2)$ (b) $e^2 - e^{-2}$

(6) Naj bo $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, za katero obstaja integral $\int_1^\infty \frac{f^2(t)}{t^2} dt$.

(a) Dokaži, da obstaja integral $\int_1^\infty \frac{1 + f^2(t)}{t^2} dt$.

(b)* Dokaži, da obstaja integral $\int_1^\infty \frac{|f(t)|}{t^2} dt$.

(7) Naj bo $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c > 0$.

(a) Dokaži, da za vsak $a \geq 0$ obstaja tak $b \geq 0$, da je $\int_0^b f(t) dt = a$.

(b)* Dokaži, da obstaja tak $M \geq 0$, da je za vsak $a \geq M$ število b , ki ustreza pogojem iz točke (a), enolično določeno.

(8) Izračunaj $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$I_n = n!$

(9)* Ali ima telo, ki ga dobimo z rotacijo krivulje $f(x) = \frac{\sin(ax)}{x}$ (definirane na vsem \mathbb{R}) okoli abscisne osi končen volumen za kak $a \in \mathbb{R}$? Če volumen obstaja, ga izračunaj; pri tem si lahko pomagaš z enakostjo

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$