

Analiza 1

Funkcijska zaporedja in vrste

- (1) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisi $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Določi limitno funkcijo in ugotovi, ali zaporedje konvergira enakomerno.
- (2) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.
- (a) Določi limitno funkcijo in pokaži, da zaporedje konvergira enakomerno.
- (b) Ali velja $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?
- (3) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$.
- (a) Določi limitno funkcijo in ugotovi, ali je konvergenca enakomerna.
- (b) Ali velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$?
- (4) Naj funkcijsko zaporedje $f_n : [a, b] \rightarrow [c, d]$ enakomerno konvergira na $[a, b]$ k funkciji f in naj bo $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dokaži, da potem funkcijsko zaporedje $g \circ f_n$ enakomerno konvergira na $[a, b]$.
- (5) Pokaži, da je s predpisom $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$ definirana funkcija na intervalu $[0, 1]$. Poenostavi njen predpis! Ali funkcijska vrsta enakomerno konvergira na tem intervalu?
- (6) Podana je funkcija $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. Pokaži, da gre za funkcijo, ki je definirana in zvezna na celi realni osi. Ali je tudi odvedljiva?
- (7) Pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}x}$ konvergira enakomerno na $[a, \infty)$ za vsak $a > 0$. Ali vrsta konvergira enakomerno na $(0, \infty)$?
- (8) Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n}$. Dokaži, da vrsta konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$.
- (9) Določi definicijski območji danih funkcij in nato pokaži, da sta zvezni:
- (a) $W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$,
- (b) $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
- (10) Določi konvergenčna območja naslednjih potenčnih vrst:
- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$,
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^{n-1}n!}$.

(11) Določi konvergenčni območji danih potenčnih vrst in ju seštej:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

(12) Seštej naslednji številski vrsti:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!},$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$

(13) Izračunaj Taylorjeva polinoma:

(a) reda 2 funkcije $f(x) = x \ln^2 x$ okoli točke $a = 1$,

(b) reda 3 funkcije $f(x) = xe^{-x^2}$ okoli točke $a = 0$.

(14) Z uporabo Taylorjevega izreka oceni napaki naslednjih aproksimacij:

(a) $\arctg x \approx x$ za $|x| < \frac{1}{2}$,

(b) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ za $|x| < \frac{1}{2}$.

(15) Razvij naslednje funkcije v Taylorjevo vrsto:

(a) $f(x) = \frac{1}{x^5}$ okoli točke $a = 1$,

(b) $f(x) = \arctan x$ okoli točke $a = 0$,

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ okoli točke $a = 1$.

(16) Izračunaj limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4}{x^6} \quad \text{in} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x},$$

ter določi $f^{(100)}(1)$ za $f(x) = \ln(3+x)$.