

ANALIZA 1
27. domača naloga

(1) Dano je funkcijsko zaporedje $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{\ln(1 + x/n)}{x + 1}.$$

- (a) Dokaži, da zaporedje konvergira po točkah na $[0, \infty)$ in določi limitno funkcijo.
(b) Dokaži, da zaporedje konvergira enakomerno na $[0, a]$ za vsak $a > 0$.
(c) Ali je konvergenca enakomerna na $[0, \infty)$? Odgovor utemelji.

(a) $f(x) = 0$ (b) Da, konvergenca je enakomerna.

(2) Za $n \in \mathbb{N}$ in $x > 0$ definirajmo

$$f_n(x) = n^2 \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right) \quad \text{in} \quad g_n(x) = 5\sqrt[3]{n} \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right).$$

- (a) Ali funkcijsko zaporedje f_n konvergira na intervalu $(0, \infty)$? Ali konvergira enakomerno?
(b) Ali funkcijsko zaporedje g_n konvergira na intervalu $(0, \infty)$? Ali konvergira enakomerno?

(a) Divergira za vsak x . (b) Enakomerno konvergira proti $g(x) = 0$.

(3) Določi množico $D \subset \mathbb{R}$ tistih števil x , za katere konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg nx}{n^2}$. Ali vrsta za $x \in D$ konvergira absolutno? Ali vrsta konvergira enakomerno na D ? Utemelji!

Vrsta konvergira enakomerno na $D = \mathbb{R}$.

(4) Dano je funkcijsko zaporedje $u_n(x) := \ln \left(1 + \frac{x^4}{n(1+x^2)} \right)$. Funkcijo f definiramo s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(x) .$$

Določi definicijsko območje D funkcije f ! Ali je konvergenca absolutna? Ali je f zvezna na D ? (Nasvet: ugotovi, kje je konvergenca enakomerna.)

(5) Pokaži, da funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Ali vrsta konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$? Določi vse $x \in \mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira absolutno, in izračunaj vsoto vrste.

Vrsta konvergira proti funkciji $f(x) = -\frac{x^2}{x^2+2}$ enakomerno in absolutno na $\mathbb{R}$.