

ANALIZA 1
28. domača naloga

(1) Določi območje konvergence za naslednje vrste.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{1 + \ln n} (x-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3+n} (x-1)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n^2 9^n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n^n}}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \ln n} (2x+1)^n \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n(n+2)}}{(n+2)^{n^2}} x^{3n} \quad (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$$

$$(a) (0, 2) \quad (b) [0, 2) \quad (c) [-1, 5] \quad (d) \mathbb{R} \quad (e) [-1, 0) \quad (f) \{0\} \quad (g) [-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$$

(2) Razvij funkcijo $f(x) = xe^{x+2}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke -1 in ugotovi, kje dobljena vrsta konvergira. Izračunaj še $f^{(2004)}(-1)$.

$$\text{Taylorjeva vrsta je } -e + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(n-1)}{n!} (x+1)^n \text{ in konvergira za vsak } x \in \mathbb{R}. \quad f^{(2004)}(-1) = 2003e.$$

(3) Razvij funkcijo $f(x) = \ln \sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-x}}$ v Taylorjevo vrsto okoli izhodišča in določi območje konvergence.

$$\text{Taylorjeva vrsta je } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-2)^n}{3n} x^n \text{ in konvergira na } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

(4) (a) Razvij funkcijo $\arcsin x$ v Taylorjevo vrsto okrog 0 in določi njen konvergenčni radij.

(b) S pomočjo točke (a) izračunaj limito $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}$.

$$(a) \arcsin x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ konvergenčni polmer je } 1. \quad (b) \frac{1}{6}$$

(5) Naj bo $f(x) = \frac{7x+1}{2x^2+x-1}$. Funkcijo f razvij v Taylorjevo vrsto s središčem v 0, ugotovi, kje ta vrsta konvergira, in določi $f^{(2001)}(0)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3 \cdot 2^n) x^n \text{ na } (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad f^{(2001)}(0) = -2001!(2 + 3 \cdot 2^{2001}).$$

(6) Za funkcijo f , določeno z $\sin x + \sin f(x) = 1$ in $f(\pi/2) = \pi$, zapiši Taylorjev polinom tretje stopnje!

$$T_3(x) = \pi - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2.$$

(7) (a)* Pokaži, da za nek $c > 0$ velja neenakost $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{12}x^3$ za vsak $x \in [0, c]$.

(b) Ugotovi, za katere $a \in \mathbb{R}$ konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}\right)^a$! $a > \frac{1}{3}$

(8) Razvij funkcijo $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t-1} dt$ v Taylorjevo vrsto okoli točke 1 in določi območje konvergence.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} (x-1)^n \text{ za } |x-1| \leq 1.$$

(9) Izračunaj $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1+\frac{4}{3}x^2}}{2-x^2-2\cos x}$. $-\frac{2}{3}$

(10) Določi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, da bo obstajala (končna) limita $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5} \left(e^x - \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2} \right)$. Izračunaj L .

$$a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{12}, c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{12} \text{ in } L = \frac{1}{720}.$$