

Nekaj nalog (nekateri z rešitvami)

Matija Vidmar

22. maj 2018

1. Naj bo X nenegativna slučajna spremenljivka z vrednostmi v $[0, \infty]$ in upanjem $\mu \in (0, \infty)$. Naj bo Y nenegativna slučajna spremenljivka, ki zadošča $P(Y > y) = \frac{1}{\mu} \int_y^\infty P(X > x) dx$ (Y ima porazdelitev zintegriranega repa X). Izračunaj EY (izrazi z μ in $\mu_2 := EX^2$). **Spomnimo:** Naj bo $(X, \mathcal{F}, \mu)$ prostor z mero, $f \in \mathcal{F}/\mathcal{B}_{[0, \infty]}$, $p \in (0, \infty)$. Tedaj je $\int f^p d\mu = p \int_0^\infty y^{p-1} \mu(f > y) dy$.

Rešitev. Računamo (Tonelli): $EY = \int_0^\infty P(Y > y) dy = \int_0^\infty \int_y^\infty P(X > x) dx / \mu = \int_0^\infty \int_0^x P(X > x) dy dx = \int_0^\infty x P(X > x) dx = \mu_2 / (2\mu)$.

2. (25 točk) Na nekem prostoru Ω je dan proces štetja N . Kot običajno naj bodo $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ njegovi *prihodni časi/zaporedni časi skokov* ($S_0 = 0$); $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ pa *časi prvih prehodov*, $\tilde{S}_n = \inf\{t \in [0, \infty) : N_t \geq n\}$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Dokaži, da je za vsak $\omega \in \Omega$:

$$(S_n(\omega) = \tilde{S}_n(\omega) \text{ za vse } n \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow$$

$$(\text{za vse } n \in \mathbb{N}_0 \text{ je } N_{S_n(\omega)}(\omega) = n, \text{ brž ko je } S_n(\omega) < \infty) \Leftrightarrow$$

$$(\text{vsi skoki } N(\omega) = (N_t(\omega))_{t \in [0, \infty)} \text{ so velikosti ena in } N_0(\omega) = 0).$$

3. (25 točk) Naj slučajna spremenljivka X (z vrednostmi v $\mathbb{R}$) zadošča (i) $P(X > 0) > 0$ ter (ii) "zvezni" lastnosti pozabljenosti:

$$P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t) \text{ za vse } \{s, t\} \subset (0, \infty).$$

Pokaži, da tedaj obstaja $c \in (0, \infty)$, da je $X \sim \text{Exp}(c)$. Rabil/a boš sledeč elementaren, vendar netrivialen, rezultat: Če je funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nenaraščajoča ali nepadajoča, in aditivna (t.j. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za $\{x, y\} \subset (0, \infty)$), tedaj obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = cx$ za vse $x \in (0, \infty)$. **Namig:** Razmisli zakaj je $P(X > x) > 0$ za vse $x \in (0, \infty)$. Kaj veš potem povedati o funkciji $x \mapsto \log P(X > x)$, $x \in (0, \infty)$?

Rešitev. Denimo, *per absurdum*, da bi za kak $x \in (0, \infty)$ imeli $P(X > x) = 0$. Iz $P(X > x) = P(X > x/2)P(X > x/2)$ potem sledi $P(X > x/2) = 0$ in z indukcijo $P(X > x/2^n) = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}_0$. Unija dogodkov z mero nič je dogodek z mero $\stackrel{=\{X>0\}}{=}$ nič; sledi $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{X > x/2^n\}) = 0$, protislovje z $P(X > 0) > 0$. Sedaj je iz $P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$ tudi $\log P(X > s+t) = \log P(X > s) + \log P(X > t)$ za vse $\{s, t\} \subset (0, \infty)$. Funkcija $(0, \infty) \ni x \mapsto \log P(X > x)$ je tedaj aditivna in monotona; sledi, da obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $P(X > x) = e^{-cx}$ za vse $x \in (0, \infty)$. V posebnem

moramo imeti $c \in (0, \infty)$, kajti sicer $P(X > x) \geq 1$, in torej $= 1$ za vse $x \in (0, \infty)$, pa zato $P(\overbrace{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X > n\}}^{\emptyset}) = 1$, protislovje. Imamo še $P(X > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X > 1/n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-c/n} = 1$. Porazdelitvena funkcija karakterizira zakon; trditev sledi.

4. Naj bodo $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ n.e. – s porazdelitveno funkcijo F – p. slučajne spremenljivke z vrednostmi v $[0, \infty)$, končnim upanjem $\mu := ET_1 < \infty$, varianco $\sigma^2 := \text{var}(T_1)$, F nearitmetična; $S_n := \sum_{i=1}^n T_i$, $n \in \mathbb{N}_0$, ter $N_t := \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}(S_n \leq t)$, $t \in [0, \infty)$, pripadajoči prenovitveni proces. Končno naj bo $E_t := S_{N_t+1} - t$ presežek procesa N ob času $t \in [0, \infty)$.

(a) Zapiši prenovitveno enačbo za funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := EE_t$ za $t \in [0, \infty)$, $g(t) := 0$ sicer.

(b) Dokaži, da je $E[N_t] - \frac{t}{\mu} = \frac{E[E_t]}{\mu} - 1$. Uporabi to in (ali sicer) določi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(E[N_t] - \frac{t}{\mu} \right).$$

Rešitev. (a). Za $t \geq 0$, je $g(t) = EE_t = \dots = \int_{[0,t]} g(t-s) dF(s) + E[S_1 - t; S_1 > t]$. Torej $g = g \star F + h$, kjer je $h(t) = \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t)E[S_1 - t; S_1 > t]$. (b). Enakost sledi iz Waldove identite. Nato apliciramo Smithov ključni prenovitveni izrek ...

5. (25 točk) Spomnimo: proces štetja $N = (N_t)_{t \geq 0}$, je homogen Poissonov proces *glede na filtracijo* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ v zveznem času, in z intenziteto $\lambda \in (0, \infty)$, če je (i) $N_t \in \mathcal{F}_t/2^{\mathbb{N}_0}$ za vse $t \in [0, \infty)$, (ii) $N_0 = 0$, ter je (iii) prirastek $N_t - N_s$ porazdeljena po Poissonu s parametrom $\lambda(t-s)$, in neodvisen od $\mathcal{F}_s$, za vse realne $0 \leq s \leq t$. Bodi N tak in naj bo $(S_n)_{n \geq 0}$ zaporedje njegovih prihodnih časov ($S_0 = 0$); $t \in (0, \infty)$. Dokaži da S_{N_t} ni čas ustavljanja glede na $\mathbb{F}$! Ali je S_{N_0} čas ustavljanja?

Rešitev. Seveda je $S_{N_0} = S_0 = 0$ čas ustavljanja. Po drugi strani imamo za poljuben $s \in [0, t)$, $\{S_{N_t} \leq s\} = \{N_t - N_s = 0\}$. Denimo da bi torej imeli $\{N_t - N_s = 0\} \in \mathcal{F}_s$. Zaradi neodvisnosti bi sledilo $P(N_t - N_s = 0) = P(N_t - N_s = 0, N_t - N_s = 0) = P(N_t - N_s = 0)P(N_t - N_s = 0) = P(N_t - N_s = 0)^2$ in torej $e^{-\lambda(t-s)} = P(N_t - N_s = 0) \in \{0, 1\}$, kar seveda ne more biti. Ker vobče števila v intervalu $(0, t)$ so, je to protislovje.