

Analiza 1

Metrični prostori

- (1) Pokaži, da je z naslednjim predpisom podana metrika na $\mathbb{R}$:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & (x, y \in \mathbb{Q}) \vee (x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ |x - y| + 1, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Katera števila so vsebovana v krogli $K(0, 2)$?

- (2) Na množico $M = (0, \infty) \times (0, \infty)$ vpeljemo metriko d s predpisom

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \left| \ln \frac{x_2}{x_1} \right| + \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|.$$

- (a) Dokaži, da je d res metrika na množici M .
(b) Skiciraj odprto kroglo $K((1, 1), 1)$.
- (3) Poišči točke na premici $y = 2x + 1$, ki so najbližje izhodišču v metrikah d_1 , d_2 in d_∞ .
- (4) Naj bo $M = \mathcal{C}([0, 1])$ ter $K_\infty(0, r) \subset (M, d_\infty)$ in $K_1(0, r) \subset (M, d_1)$ odprti kroglji s polmerom $r > 0$ v $f \equiv 0$. Dokaži: $K_\infty(0, r) \subset K_1(0, r)$ in $K_\infty(0, r) \neq K_1(0, r)$.
- (5) Naj bo $(\mathbb{R}, d_2)$ običajen evklidski prostor. Obravnavaj odprtost in zaprtost naslednjih množic $A = [-1, 1]$, $B = \mathbb{Z}$ in $C = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (6) Naj bo $(M, d) = (\mathbb{R}^2, d_2)$. Obravnavaj odprtost in zaprtost množic $A = (0, 1) \times (0, 1)$ in $B = (0, 1) \times \{0\}$. Ali sklep velja tudi za ravnino opremljeno z metrikama d_1 in d_∞ ?
- (7) Za $x = (x_1, x_2, \dots)$ in $y = (y_1, y_2, \dots)$ iz množice realnih zaporedij $M = \mathbb{R}^\infty$ definiramo razdaljo s pravilom

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y, \\ \frac{1}{n} & ; x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}, x_n \neq y_n. \end{cases}$$

Obravnavaj odprtost oziroma zaprtost odprte krogle $K(0, \frac{1}{3})$, zaprte krogle $\overline{K}(0, \frac{1}{3})$ in zaprtja odprte krogle $K(0, \frac{1}{3})$.

- (8) Ugotovi, ali je A odprta oziroma zaprta podmnožica danega metričnega prostora:
- (a) $A = \{p \in \mathbb{R}_1[x] \mid p(1) = 0\} \subset (\mathbb{R}_1[x], d)$, kjer je $d(p, q) = \max_{x \in [0, 1]} |p(x) - q(x)|$,
(b) $A = \mathbb{R}[x] \subset (C[0, 1], d_\infty)$.
- (9) Naj bo M poljubna množica ter $d(x, x) = 0$ in $d(x, y) = 1$ za $x \neq y$. Dokaži, da je (M, d) metrični prostor. Katere podmnožice so kompaktne?
- (10) Ugotovi, ali je množica A kompaktna v evklidski metriki:
- (a) $A = (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$,
(b) $A = \mathbb{R} \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$,
(c) $A = \Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2$, kjer je $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija.

(11) Naj bo id identičnih preslikava na ravnini. Obravnavaj zveznost $id: (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$ in $id: (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_1)$.

(12) Na ravnino $\mathbb{R}^2$ s koordinatnim izhodiščem O vpeljemo pošgarsko metriko d s predpisom

$$d(T_1, T_2) = \begin{cases} 0 & ; T_1 = T_2, \\ d_2(T_1, O) + d_2(O, T_2) & ; T_1 \neq T_2. \end{cases}$$

(a) Dokaži, da je d res metrika na množici $\mathbb{R}^2$.

(b) Skiciraj krogle $K((1, 1), r)$ v odvisnosti od $r > 0$.

(c) Obravnavaj zveznost $id: (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_2)$ in $id: (\mathbb{R}^2, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d)$.

(13) V prostoru $M = \mathcal{C}([0, 1])$ je podano zaporedje $f_n(x) = x^n$.

a) Pokaži, da je to zaporedje konvergentno za d_1 ne pa tudi za d_∞ .

b) Dokaži, da preslikava $id: (M, d_1) \rightarrow (M, d_\infty)$ ni zvezna v $f \equiv 0$.

c) Dokaži, da preslikava $id: (M, d_\infty) \rightarrow (M, d_\infty)$ je zvezna v $f \equiv 0$.

(14) Naj bo $a \in [0, 1]$. Evalvacijo $ev_a: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiramo s predpisom

$$ev_a(f) = f(a).$$

Obravnavaj zveznost evalvacije, če na prostoru $C[0, 1]$ izberemo metriko d_∞ ali d_1 .

(15) Preslikavo $F: [0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definiramo s predpisom

$$F(t)(x) = x^t.$$

Obravnavaj zveznost preslikave F , če na prostoru $C[0, 1]$ izberemo metriko d_∞ ali d_1 .