

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strogo diagonalno dominantna matrika po vrsticah in $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- Opišite **ekonomičen** algoritem za izračun matrike X , ki zadošča enačbi $X A = B$.
- Algoritem uporabite v primeru, ko je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

in

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 23 & 25 & 27 \end{bmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Naj bo $f(x) = x^5 + 2x - 4$. Poiščite vse realne ničle funkcije f z Newtonovo metodo na 4 mesta natančno. Utemeljite, da ste poiskali res vse ničle.

Naloga 3 [25 točk]

Naslednja tabela prikazuje spreminjanje temperature (v °C) s časom (v urah):

ura	16	18	20	22
temp.	4	2	-2	-3

- Določite premico, ki po metodi najmanjših kvadratov najbolj opisuje podatke v tabeli.
- S pomočjo premice ocenite (do minute natančno), kdaj je temperatura padla na 0 °C.

Naloga 4 [25 točk]

Gibanje delca v tridimenzionalnem prostoru opisuje krivulja $\mathbf{r} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$. Na delec delujejo zunanje sile, zato se podreja zvezi

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = (0, 0, 1) - \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|_2 \dot{\mathbf{r}}(t).$$

Ob času $t = 0$ je $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$ in $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 1, 1)$. Z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$ izračunajte velikost hitrosti delca ob času $t = 0.1$.

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

Ime in priimek

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Matrika $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je spodnja trikotna z enkami na diagonali, matrika $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pa poljubna.

- Zapišite **učinkovit** algoritem za reševanje matričnega sistema $XL = B$ in preštejte število potrebnih operacij (zadošča utemeljitev reda števila operacij).
- Algoritem iz točke a) uporabite na primeru

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 11 & 4 \\ 24 & 14 & 8 & 3 \\ 22 & 12 & 5 & 2 \\ 24 & 14 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

Prepričajte se, da ima enačba

$$\exp(-x^2) = -2x - 2$$

natanko eno realno rešitev. Nato to rešitev poiščite z navadno iteracijo na tri mesta natančno.

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

in $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ poljuben neničelni vektor. Kam konvergira zaporedje $(\rho_k)_{k=0}^\infty$, če je

$$\rho_k = \frac{\mathbf{x}_k^T A \mathbf{x}_k}{\|\mathbf{x}_k\|_2^2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

in

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{1}{\|A \mathbf{x}_k\|_\infty} A \mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, \dots ?$$

Odgovore utemeljite.

Naloga 4 [25 točk]

Rešujete začetni problem drugega reda

$$y'' - x y' + x^2 y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- a) Problem prevedite na sistem diferencialnih enačb prvega reda.
- b) Z implicitno Eulerjevo metodo

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

poiščite približek za $y'(0.1)$. Vzemite $h = 0.1$.

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nesingularna matrika, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pa poljubna matrika. Podrobno opišite **ekonomičen algoritem** za izračun produkta $A^{-1}B$. Nato izračunajte še red števila računskih operacij vašega algoritma.

Naloga 2 [25 točk]

Z ustreznimi numeričnimi metodami poiščite koordinate vseh presečišč krivulj

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{in} \quad \exp(-x) - y + \frac{1}{2} = 0$$

na tri mesta natančno. Utemeljite, da ste poiskali vsa presečišča.

Naloga 3 [25 točk]

S pomočjo Sturmovega zaporedja izračunajte, koliko lastnih vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

je na intervalu $[-2, 1]$.

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem

$$y'' = -\sin y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

rešujete s trapezno metodo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})).$$

- a) Problem prevedite na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.
- b) Z eksplicitno Eulerjevo metodo poiščite približka za $y(0.5)$ in $y'(0.5)$.
- c) Na podlagi rezultata iz točke b) poiščite omenjena približka še s trapezno metodo. Izvedite dva koraka navadne iteracije.