

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bodo $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nesingularne matrike. Rešujete matrično enačbo $AXB = C$.

- Preverite, da ima enačba enolično rešitev za neznano nesingularno matriko $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Predlagajte **ekonomičen algoritem** za reševanje zgoraj omenjene matrične enačbe. Koliko računskih operacij v odvisnosti od n zahteva predlagani algoritem? Zadošča red velikosti.
- Algoritem izvedite za primer

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 41 & 58 \\ 106 & 150 \end{bmatrix}.$$

Morebitno pivotiranje lahko v tem primeru izpustite.

Naloga 2 [25 točk]

Izvajate navadno iteracijo oblike

$$x_{r+1} = (1 - \log x_r) \frac{x_r}{x_r + 1}, \quad r = 0, 1, \dots$$

- a) Preverite, da je negibna točka zgornje iteracije ravno rešitev enačbe $\log x + x = 0$.
- b) Preverite, da je red konvergence zgornje iteracije za ustrezen začetni približek vsaj 2.
- c) Izačunajte rešitev enačbe $\log x + x = 0$ na dve mesti natančno.

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Določite ortogonalno matriko Q tako, da bo prva vrstica matrike AQ enaka $[k, 0, 0, 0]$, $k \neq 0$.

Naloga 4 [25 točk]

Rešujete začetni problem $y'' = -y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Uporabite trapezno metodo

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))$$

in določite približek za $y'(0.5)$. Za korak izberite $h = 0.5$.

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

Ime in priimek

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Naloga 1 [25 točk]

Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 13 & -9 \\ 3 & -9 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 27 \end{bmatrix}.$$

Z razcepom Choleskega preverite, da je matrika A simetrična pozitivno definitna ter z uporabo tega razcepa rešite gornji sistem enačb.

Naloga 2 [25 točk]

Rešujete enačbo $\exp(-x^2) - x^3 = 0$.

- a) Utemeljite odgovor na vprašanje, koliko rešitev ima zgornja enačba.
- b) Vse rešitve določite na tri mesta natančno s tangentno metodo. Za vsako rešitev zapišite ustrezní začetni približek, vse vmesne približke in končni rezultat.

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = 1/(x+1)$ interpolirate s polinomom p_5 tako, da interpolirate vrednosti in odvode v točkah $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ in $x_2 = 2$. Določite kar se da natančno oceno za napako

$$\max_{x \in [0,2]} |f(x) - p_5(x)|.$$

Naloga 4 [25 točk]

Rešujete začetni problem drugega reda

$$y'' = -x y, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Z implicitno Eulerjevo metodo

$$y_{r+1} = y_r + h f(x_{r+1}, y_{r+1})$$

za sistem diferencialnih enačb določite približek za odvod rešitve pri $x = 0.5$. Za korak vzemite $h = 0.5$.

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Izračunajte LU razcep matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Uporabite delno pivotiranje. Nato izračunajte $\det A^{-1}$.

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Naloga 2 [25 točk]

Z metodo navadne iteracije poiščite vse ničle funkcije $f(x) = \exp(-x^2) - x^2$ na dve mesti natančno. Utemeljite, da ste našli vse ničle.

Naloga 3 [25 točk]

Določite vodilni koeficient polinoma stopnje kvečjemu 5, ki interpolira vrednosti funkcije $f(x) = 1/(x+1)$ in vrednosti njenih prvih odvodov v točkah $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ ter $x_2 = 2$.

Naloga 4 [25 točk]

Koliko lastnih vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

je večjih ali enakih 3? Odgovor podrobno utemeljite.