

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

1	2	3	4	Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Sistem linearnih enačb je oblike

$$\sum_{j=1}^{n-i+1} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

kjer so a_{ij} ter b_i dana realna števila in x_j neznanke.

- Kakšnemu pogoju morajo ustrezati števila a_{ij} , da bo imel sistem enolično rešitev?
- Zapišite **ekonomičem** algoritem za reševanje tega sistema in preštejte število potrebnih operacij (zadošča red števila operacij).
- Poiščite rešitev v primeru, ko je $n = 4$, vsi neničelni a_{ij} enaki 1 in $b_i = 5 - i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Naloga 2 [25 točk]

Prepričajte se, da ima enačba

$$-x^5 - 3x^3 + 5 = 0$$

natanko eno rešitev. Poiščite jo na tri mesta natančno tako, da uporabite metodo navadne iteracije.

Naloga 3 [25 točk]

Uporabite Sturmovo zaporedje in ugotovite koliko lastnih vrednosti ima matrika

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

na intervalu $[-1, 1]$?

Naloga 4 [25 točk]

Rešujete začetni problem

$$y'' = -x y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Uporabite eksplicitno Eulerjevo metodo za sistem diferencialnih enačb prvega reda s korakom $h = 0.25$ in določite približke za $y(0.5)$, $y'(0.5)$ in $y''(0.5)$.

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Uporabljate lahko pisalo, kalkulator in dva lista formata A4 z zapiski!

--	--	--	--	--

1 2 3 4 Σ

--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Za obrnljivo matriko $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ velja: $a_{ij} = 0$, za $j > i + 1$.

- Zapišite en primer matrike A_4 .
- Izračunajte LU razcep brez pivotiranja za matriko A_3 , ki ima **neničelne elemente** enake vsoti indeksov vrstice in stolpca, kjer se nahaja.
- Vsaj koliko ničelnih elementov ima matrika U iz LU razcepa matrike A_n ? Odgovor utemeljite!

Naloga 2 [25 točk]

Izvajate navadno iteracijo oblike

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}, \quad a > 0.$$

- a) Prepričajte se, da zaporedje dobljenih približkov lahko konvergira le k $\sqrt[3]{a}$.
- b) Točno določite red konvergence iteracije.
- c) Uporabite iteracijo za izračun $\sqrt[3]{10}$ na dve decimalni mesti natančno. Zapišite vse zaporedne približke.

Naloga 3 [25 točk]

Določite interpolacijski polinom p_3 , ki ima v točkah $x_0 = 0$ in $x_1 = \pi/2$ enako vrednost in odvod kot funkcija $f(x) = \cos x$.

Naloga 4 [25 točk]

Prosti pad padalca, ki skoči iz mirujočega helikopterja, modeliramo kot začetni problem drugega reda

$$z''(t) = -g - k z'(t) |z'(t)|, \quad z(0) = z_0, \quad z'(0) = z'_0.$$

Pri tem je $z(t)$ višina padalca ob času t (v metrih), $g = 10m/s^2$ težni pospešek, $k = 0.01/m$, $z_0 = 2000m$ in $z'_0 = 0m/s$.

- a) Prevedite začetni problem drugega reda na sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda.
- b) Izračunajte oceno za višino, hitrost in pospešek po eni sekundi padanja, če uporabite eksplicitno Eulerjevo metodo s korakom $dt = 0.5s$.

--	--	--	--	--

1	2	3	4	Σ
---	---	---	---	---

--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

Ime in priimek**Naloga 1 [25 točk]**Dan je sistem $Ax = b$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & -5 & -7 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & -4 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Določite LU razcep (brez pivotiranja) matrike A ter z uporabo tega razcepa rešite gornji sistem linearnih enačb. Izračunajte še neskončno normo matrike A .

Naloga 2 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = \cos x$ aproksimirate na $[0, h]$, $h > 0$, tako, da s polinomom stopnje 4 interpolirate vrednost, prvi odvod in drugi odvod v točki $x_0 = 0$ ter vrednost in prvi odvod v točki $x_1 = h$. Kolikšen je lahko največ h , da napaka pri interpolaciji ne bo presegla vrednosti 0.01?

Naloga 3 [25 točk]

Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = [1, 1]^T.$$

Kam (če sploh) konvergira zaporedje $(\mathbf{x}_k)_{k=0}^\infty$, kjer je

$$\mathbf{x}_{k+1} = \frac{1}{\|A\mathbf{x}_k\|_\infty} A\mathbf{x}_k, \quad k = 0, 1, \dots?$$

Naloga 4 [25 točk]

Dan je začetni problem drugega reda

$$y'' - y'y^2 + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

- a) Prevedite dano diferencialno enačbo drugega reda na sistem diferencialnih enačb prvega reda.
- b) Z uporabo Eulerjeve metode izračunajte približno vrednost rešitve sistema v točki $x = 1$, kjer za korak vzamete $h = 0.5$. Kolikšna je približna vrednost odvoda v isti točki?