

1	2	3	4	Σ

Vpisna številka							

Ime in priimek

Naloga 1 [25 točk]

Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spodnja trikotna matrika, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zgornja trikotna matrika in $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Predpostavimo, da sta A in B nesingularni. Izračunati želimo matriko $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, da bo $AXB = C$.

- Opišite čim bolj ekonomičen algoritem za izračun matrike X brez pivotiranja.
- Utemeljite red časovne zahtevnosti algoritma iz točke a).
- Poiščite X v primeru, ko je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 23 \end{pmatrix}.$$

Rešitev. Pišimo $Y = XB = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n]$ in $C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$. Vektorje $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, dobimo z n reševanji sistemov $A\mathbf{y}_i = \mathbf{c}_i$. Ker je matrika A spodnja trikotna, vsako reševanje zahteva n^2 operacij, skupaj torej n^3 operacij. Zvezo $XB = Y$ prepišemo v $B^T X^T = Y^T$ in stolpce matrike X^T izračunamo na enak način, kot stolpce matrike Y , saj je B zgornja trikotna, torej je B^T spodnja trikotna. Potrebujemo spet n^3 operacij, skupaj torej $2n^3$.

Za poseben primer iz naloge po zgornjem postopku dobimo

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$$

in

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Naloga 2 [25 točk]

EksPLICITNO zapišite Householderjevo zrcaljenje P , ki preslika vektor $\mathbf{x} = [3, 0, 4]^T$ v večkratnik prvega enotskega vektorja. Nato poiščite vektor, ki ga P preslika v $\mathbf{y} = [1, 2, 3]^T$.

Rešitev. Householderjevo zrcaljenje P je oblike

$$P = I - \frac{2}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w} \mathbf{w}^T,$$

kjer je $\mathbf{w} = [3 + 5, 0, 4]^T$. Torej je

$$P = \begin{pmatrix} -3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Matrika P je simetrična in ortogonalna, zato je $P^{-1} = P^T = P$. Ker iščemo P , da je $P\mathbf{z} = \mathbf{y}$, je

$$\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y} = P\mathbf{y} = [-3, 2, 1]^T.$$

Naloga 3 [25 točk]

Funkcijo $f(x) = 1/x$ aproksimirate na intervalu $[1, 3]$ tako, da s polinomom p stopnje 5 interpolirate vrednosti in prve odvode v točkah $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ in $x_2 = 3$.

a) Določite ustrezeni interpolacijski polinom p v Newtonovi obliki.

b) Čim boljše ocenite, koliko je lahko največ

$$\max_{1 \leq x \leq 3} |f(x) - p(x)|.$$

Rešitev. Upoštevamo, da je $f'(x) = -1/x^2$ in sestavimo tabelo deljenih diferenc

	$[\cdot]$	$[\cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$	$[\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot]$
1	1					
		-1				
1	-1		1/2			
		-1/2		-1/4		
2	1/2		1/4		1/12	
		-1/4		-1/12		-1/36
2	-1/4		1/12		1/36	
		-1/6		-1/36		
3	1/3		1/18			
		-1/9				
3	-1/9					

Polinom p se torej v Newtonovi obliki glasi

$$p(x) = 1 - (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - \frac{1}{4}(x - 1)^2(x - 2) + \frac{1}{12}(x - 1)^2(x - 2)^2 - \frac{1}{36}(x - 1)^2(x - 2)^2(x - 3).$$

Za oceno napake uporabimo

$$|f(x) - p(x)| = \frac{|f^{(6)}(\xi)|}{6!} |\omega(x)| \leq \frac{1}{720} \max_{\xi \in [1, 3]} |f^{(6)}(\xi)| \max_{x \in [1, 3]} |\omega(x)|.$$

Ker je $\max_{\xi \in [1, 3]} |f^{(6)}(\xi)| \leq 720$ in $\max_{x \in [1, 3]} |\omega(x)| = |\omega(\tilde{x})| = 4/27$, kjer je $\tilde{x} = (6 - \sqrt{3})/3$, je

$$\max_{x \in [1, 3]} |f(x) - p(x)| \leq 4/27.$$

Naloga 4 [25 točk]

Začetni problem $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_a$, rešujete z metodo Runge-Kutta oblike

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\k_2 &= f(x_{n-1} + \frac{2}{3}h, y_{n-1} + \frac{2}{3}h k_1), \\y_n &= y_{n-1} + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2).\end{aligned}$$

Naj bo $f(x, y) = -xy$ in $y(0) = 1$. Z omenjeno metodo izračunajte numerični približek za točno rešitev pri $x = 1/2$, če za korak vzamete $h = 1/2$. Kolikšna je absolutna napaka izračunanega približka? Kakšen je približek za odvod v točki $x = 1/2$?

Rešitev. Iz podatkov naloge sledi $f(x, y) = -xy$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $y_0 = 1$ in $h = 1/2$. Torej je $k_1 = f(x_0, y_0) = 0$, $k_2 = f(x_0 + 2/3h, y_0 + 2/3hk_1) = f(1/3, 1) = -1/3$ in $y_1 = y_0 + h(k_1 + 3k_2)/4 = 1 + 1/8(-1) = 7/8 = 0.875$.

Točno rešitev enačbe lahko dobimo z metodo separacije spremenljivk. Izkaže se, da je $y(x) = \exp(-x^2/2)$, torej je absolutna napaka enaka $|\exp(-1/8) - 7/8| \approx 0.007497$. Odvod v točki $x = 1/2$ lahko ocenimo z $y'(1/2) \approx -1/2(7/8) = -7/16 = -0.4375$.