

Matematika 2

Diferencialne enačbe

(1) Reši diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami:

- (a) $y' = 2xy$,
- (b) $y' \operatorname{tg} x = y$,
- (c) $y' = 2x(1 + y^2)$,
- (d) $xyy' = 1 - x^2$.

Rešitev: Diferencialna enačba ima *ločljive spremenljivke*, če jo lahko zapišemo v obliki

$$y' = f(x)g(y)$$

za neki zvezni funkciji f in g . Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami rešujemo po naslednjem postopku:

- (1) Zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$,
- (2) enačbo preoblikujemo tako, da damo x -e na eno stran, y -e pa na drugo stran,
- (3) integriramo vsako stran enačbe posebej,
- (4) izrazimo $y = y(x)$.

(a) $y' = 2xy$:

Ta enačba ima ločljive spremenljivke. Izberemo lahko $f(x) = 2x$ in $g(y) = y$. Računajmo:

$$\begin{aligned}y' &= 2xy, \\ \frac{dy}{dx} &= 2xy, \\ \frac{dy}{y} &= 2x \, dx, \\ \ln y &= x^2 + c, \\ y &= e^{x^2+c}, \\ y &= e^c e^{x^2}.\end{aligned}$$

Vidimo, da je rešitev odvisna še od konstante c . Če je c konstanta, je tudi e^c konstanta, ki jo označimo z C . Od tod dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{C e^{x^2}}}.$$

Za vsako izbiro konstante C dobimo natanko določeno rešitev enačbe. Pri računanju smo potihoma predpostavili, da je $y \neq 0$. Hitro pa se lahko prepričamo, da je rešitev enačbe tudi funkcija $y(x) = 0$.

(b) $y' \operatorname{tg} x = y$:

Tudi ta enačba ima ločljive spremenljivke. Računajmo:

$$\begin{aligned}y' \operatorname{tg} x &= y, \\ \frac{dy}{y} &= \operatorname{ctg} x \, dx, \\ \ln y &= \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln(\sin x) + c, \\ y &= e^{\ln(\sin x) + c}, \\ y &= e^c \sin x.\end{aligned}$$

Če spet pišemo $C = e^c$, dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{C \sin x}}.$$

(c) $y' = 2x(1 + y^2)$:

Sedaj imamo:

$$\begin{aligned}y' &= 2x(1 + y^2), \\ \frac{dy}{1 + y^2} &= 2x \, dx, \\ \operatorname{arc} \operatorname{tg} y &= x^2 + C.\end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = \underline{\underline{\operatorname{tg}(x^2 + C)}}.$$

(d) $xyy' = 1 - x^2$:

Računajmo:

$$\begin{aligned}xyy' &= 1 - x^2, \\ y \, dy &= \left(\frac{1}{x} - x \right) dx, \\ \frac{y^2}{2} &= \ln x - \frac{x^2}{2} + C.\end{aligned}$$

Od tod lahko izrazimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{\pm \sqrt{2 \ln x - x^2 + 2C}}}.$$

□

(2) Reši diferencialne enačbe pri danih začetnih pogojih:

- (a) $y' = 2y$, $y(0) = 3$,
- (b) $y' + xy = 0$, $y(0) = 1$,
- (c) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$.

Rešitev: Splošna rešitev diferencialne enačbe prvega reda sestoji iz enoparametrične družine krivulj, ki so parametrizirane z neko konstanto. Točno določeno rešitev pa dobimo z upoštevanjem začetnega pogoja.

(a) $y' = 2y$, $y(0) = 3$:

Najprej poiščimo splošno rešitev dane diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned}y' &= 2y, \\ \frac{dy}{y} &= 2 dx, \\ \ln y &= 2x + c, \\ y &= e^{2x+c}, \\ y &= Ce^{2x}.\end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$3 = y(0) = Ce^{2 \cdot 0} = C,$$

od koder sledi $C = 3$. Rešitev enačbe je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{3e^{2x}}}.$$

(b) $y' + xy = 0$, $y(0) = 1$:

Splošna rešitev diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}y' + xy &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -x dx, \\ \ln y &= -\frac{x^2}{2} + c, \\ y &= e^{-\frac{x^2}{2}+c}, \\ y &= Ce^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo

$$1 = y(0) = Ce^0 = C,$$

od koder sledi $C = 1$. Rešitev enačbe je funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{e^{-\frac{x^2}{2}}}}.$$

(c) $y' = \frac{y}{x}$, $y(1) = 2$:

Splošna rešitev diferencialne enačbe je tokrat:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x}, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x}, \\ \ln y &= \ln x + c, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Začetni pogoj nam da

$$2 = y(1) = C \cdot 1 = C,$$

od koder sledi $C = 2$ in

$$y(x) = \underline{\underline{2x}}.$$

□

(3) Reši linearne diferencialne enačbe:

(a) $y' - 3y = 3$,

(b) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$,

(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$.

Rešitev: Linearna diferencialna enačba prvega reda je diferencialna enačba oblike

$$y' + p(x)y = q(x)$$

za neki zvezni funkciji p in q . Če je $q = 0$, je enačba *homogena*, sicer pa je *nehomogena*. Linearne diferencialne enačbe prvega reda rešujemo v dveh korakih:

(1) Poiščemo rešitev prirejene homogene enačbe $y_h(x) = Cy_0(x)$,

(2) splošno rešitev poiščemo z nastavkom $y(x) = C(x)y_0(x)$.

(a) $y' - 3y = 3$:

Homogeni del:

Prirejena homogena enačba linearne diferencialne enačbe je zmeraj enačba z ločljivimi spremenljivkami. V našem primeru je to enačba:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= 3 dx, \\ \ln y &= 3x + c, \\ y &= e^{3x+c}, \\ y &= Ce^{3x}. \end{aligned}$$

Pri linearni diferencialni enačbi je rešitev homogene enačbe zmeraj oblike

$$y_h(x) = C y_0(x),$$

zato ponavadi imena konstant izberemo tako, da imamo na koncu konstanto C . V našem primeru je torej $y_0(x) = e^{3x}$.

Nehomogeni del:

Splošno rešitev linearne diferencialne enačbe lahko poiščemo z metodo variacije konstante. Naj bo $y_h(x) = C y_0(x)$ rešitev homogene enačbe in vzemimo nastavek

$$y(x) = C(x)e^{3x},$$

ki ga vstavimo v enačbo, od koder z integriranjem dobimo $C(x)$. V našem primeru je $y'(x) = C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x}$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{3x} + 3C(x)e^{3x} - 3C(x)e^{3x} &= 3, \\ C'(x) &= \frac{3}{e^{3x}} = 3e^{-3x}, \\ C(x) &= \int 3e^{-3x} dx = -e^{-3x} + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo rezultat

$$y(x) = C(x)e^x = (-e^{-3x} + C) e^{3x} = \underline{\underline{-1 + Ce^{3x}}}.$$

(b) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$:

Homogeni del:

Najprej poiščimo splošno rešitev homogene enačbe:

$$\begin{aligned} y' + y \cos x &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= -\cos x dx, \\ \ln y &= -\sin x + c, \\ y &= Ce^{-\sin x}. \end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzemimo nastavek $y(x) = C(x)e^{-\sin x}$. Sledi $y'(x) = C'(x)e^{-\sin x} - \cos x C(x)e^{-\sin x}$ in

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-\sin x} - \cos x C(x)e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x} \cos x &= e^{-\sin x}, \\ C'(x) &= \frac{e^{-\sin x}}{e^{-\sin x}} = 1, \\ C(x) &= \int 1 dx = x + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo

$$y(x) = C(x)e^{-\sin x} = (x + C) e^{-\sin x} = \underline{\underline{xe^{-\sin x} + Ce^{-\sin x}}}.$$

(c) $y' - y = e^{2x}$, $y(0) = 2$:

Homogeni del:

Splošna rešitev homogene enačbe je:

$$\begin{aligned}y' - y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= dx, \\ \ln y &= x + c, \\ y &= Ce^x.\end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Sedaj je $y(x) = C(x)e^x$ in $y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x$. Od tod sledi:

$$\begin{aligned}C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x &= e^{2x}, \\ C'(x) &= \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x, \\ C(x) &= \int e^x dx = e^x + C.\end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = C(x)e^x = (e^x + C)e^x = e^{2x} + Ce^x.$$

Konstanto C določimo z upoštevanjem začetnega pogoja

$$2 = y(0) = e^0 + Ce^0 = 1 + C.$$

Od tod sledi $C = 1$ in

$$y(x) = \underline{\underline{e^{2x} + e^x}}.$$

□

(4) Reši linearno diferencialno enačbo $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$ pri začetnem pogoju $y(1) = 8$.

Rešitev: Homogeni del:

Splošna rešitev homogene enačbe je tokrat:

$$\begin{aligned}(x+1)y' - 2y &= 0, \\ \frac{dy}{y} &= \frac{2dx}{x+1}, \\ \ln y &= 2\ln(x+1) + c, \\ y &= C(x+1)^2.\end{aligned}$$

Nehomogeni del:

Vzeli bomo $y(x) = C(x)(x+1)^2$, od koder sledi $y'(x) = C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1)$ in

$$(x+1)(C'(x)(x+1)^2 + C(x)2(x+1)) - 2C(x)(x+1)^2 = (x+1)^4,$$

$$C'(x) = \frac{(x+1)^4}{(x+1)^3} = x+1,$$

$$C(x) = \int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Splošna rešitev enačbe je

$$y(x) = C(x)(x+1)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)(x+1)^2,$$

konstanta C pa zadošča enakosti

$$8 = y(1) = \left(\frac{1}{2} + 1 + C\right)4.$$

Sledi $C = \frac{1}{2}$ in

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+1)^4}}.$$

□

(5) Reši Bernoullijevi diferencialni enačbi:

(a) $y' - y = e^x y^2$,

(b) $2xy' - y = \frac{x^2}{y}$, pri začetnem pogoju $y(1) = -2$.

Rešitev: Diferencialna enačba 1. reda je *Bernoullijeva*, če jo lahko zapišemo v obliki

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

za neki zvezni funkciji p in q in $n \in \mathbb{R}$. V primeru $\alpha \in \{0, 1\}$ je to linearna DE, v splošnem pa jo s substitucijo $u = y^{1-n}$ prevedemo na linearno enačbo

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x).$$

(a) $y' - y = e^x y^2$:

V tem primeru je $n = 2$, zato je $u = \frac{1}{y}$ in $y = \frac{1}{u}$. Najprej moramo rešiti linearno enačbo

$$-u' - u = e^x.$$

Rešitev homogene enačbe je $u_h = Ce^{-x}$, z nastavkom $u(x) = C(x)e^{-x}$ pa dobimo:

$$-(C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}) - C(x)e^{-x} = e^x,$$

$$C'(x) = -e^{2x},$$

$$C(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Sledi

$$u(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)e^{-x} = -\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$$

in

$$y(x) = \frac{1}{\underline{\underline{-\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}}}}.$$

(b) $2xy' - y = \frac{x^2}{y}$:

Sedaj je $n = -1$ in $u = y^2$. Diferencialna enačba za u se tako glasi

$$\frac{1}{2} \cdot 2xu' - u = x^2.$$

Rešitev homogene enačbe $xu' - u = 0$ je $u_h = Cx$, z nastavkom $u(x) = C(x)x$ pa dobimo:

$$\begin{aligned}x(C'(x)x + C(x)) - C(x)x &= x^2, \\C'(x) &= 1, \\C(x) &= x + C.\end{aligned}$$

Od tod sledi $u(x) = (x + C)x = x^2 + Cx$ in

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + Cx}.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $-2 = y(1) = \pm\sqrt{1 + C}$ vidimo, da moramo izbrati negativen predznak in da je $C = 3$. Rešitev enačbe, ki ustreza $y(1) = -2$, je torej

$$y(x) = \underline{\underline{-\sqrt{x^2 + 3x}}}.$$

□