

The background of the slide is a painting of a forest scene. In the foreground, a large, gnarled tree trunk is visible on the left side. A path or stream leads from the bottom center towards the background, where a small figure of a person can be seen. The overall color palette is muted, with earthy tones and a soft, painterly style.

ANA3 Finančna matematika

Blaž Jelenc

31. oktober 2020

Kazalo

1	Krivulje	5
2	Ploskve	11
3	Integrali s parametrom	17
4	Dvojni integral	29
5	Trojni integral	37
6	Domače naloge	43

☞ **Pot** v $\mathbb{R}^3$ (ali $\mathbb{R}^2$) je gladka preslikava

$$\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

kjer je $I \in \mathbb{R}$ interval (odprt, zaprt, polodprt,...).

Krivulja je slika preslikave $\vec{r}$, preslikavi $\vec{r}$ pravimo tudi parametrizacija krivulje.

Parametrizacija oz. pot je **regularna**, če je $\dot{\vec{r}}(t) \neq 0$ za vsak $t \in I$.

☞ **Dolžina poti.** Naj bo $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ pot v $\mathbb{R}^3$. Potem je dolžina poti dana z

$$\int_a^b |\dot{\vec{r}}(t)| dt.$$

☞ **Naravna parametrizacija.** Pot $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ je naravno parametrizirana, če je $|\dot{\vec{r}}(t)| = 1$ za vsak $t \in I$. Potem pravimo, da je parameter t **naravni parameter** in ga tipično označimo z s .

Vsako regularno pot $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ lahko naravno **reparametriziramo**. Naj bo $a \in I$. Definiramo funkcijo

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau$$

in opazimo, da velja $\dot{s}(t) = |\dot{\vec{r}}(t)| > 0$, ker je pot regularna. To pomeni, da je $s : I \rightarrow J$, $t \mapsto s(t)$ difeomorfizem in označimo z $t : J \rightarrow I$, $s \mapsto t(s)$ inverz preslikave s .

Potem je $\vec{\rho} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, dana s predpisom

$$\rho(s) = \vec{r}(t(s)) \quad s \in J$$

naravno parametrizirana pot, saj velja

$$|\vec{\rho}'(s)| = |\dot{\vec{r}}(t(s))t'(s)| = |\dot{\vec{r}}(t(s))\frac{1}{|\dot{\vec{r}}(t(s))|}| = 1.$$

NALOGE

NALOGA 1.1. Parametriziraj naslednje krivulje v $\mathbb{R}^2$ oz. $\mathbb{R}^3$:

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$
2. Poljuben vzporednik na enotski sferi S^2 .
3. Poljuben poldnevnik na enotski sferi S^2 .
4. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.
5. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 6, x^2 - y^2 + z^2 = 4\}$.
6. Cikloida: Krivulja, ki jo opiše točka na robu kroga radija a , ki se kotali brez zdrsanja po premici.
7. Krivulja, ki jo opiše točka na robu kroga radija a , ki se kotali brez zdrsanja po zunanosti kroga radija b .
8. Krivulja, ki jo opiše konec niti, ki se odvíja s kroga radija a .

REŠITEV. 1. $\vec{r}(t) = (t, t^2)$.

2. $\vec{r}(t) = (\sqrt{1 - z_0^2} \cos \varphi, \sqrt{1 - z_0^2} \sin \varphi, z_0)$.
3. $\vec{r}(\vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi_0, \sin \vartheta \sin \varphi_0, \cos \vartheta)$.
4. Vektorja $\vec{e}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ in $\vec{e}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$ sta enotska in pravokotna na $(1, 1, 1)$. Potem je

$$\vec{r}(t) = \cos t \vec{e}_1 + \sin t \vec{e}_2.$$

5. Gre za dva vzporednika na sferi v $y = \pm 1$.
6. $\vec{r}(t) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$.
7. $\vec{r}(t) = ((a + b) \cos t - a \cos(t + \frac{b}{a}t), (a + b) \sin t - a \sin(t + \frac{b}{a}t))$.
8. $\vec{r}(t) = (a \cos t + at \sin t, a \sin t - at \cos t)$.

NALOGA 1.2. Dana je pot

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1+t}{t^3}, \frac{5\sqrt{3}}{3} \frac{1+t}{t^2}\right) \quad t \in (0, \infty).$$

Izračunaj kot, ki ga pot oklepa z x -osjo v točki $t = 1$.

REŠITEV. $\frac{2\pi}{3}$.

NALOGA 1.3. Dana je krivulja $\mathcal{K}$ v implicitni obliki

$$x^2 + xy + y^3 = 7.$$

Določi enačbo tangentne premice na krivuljo $\mathcal{K}$ v točki $(2, -1)$.

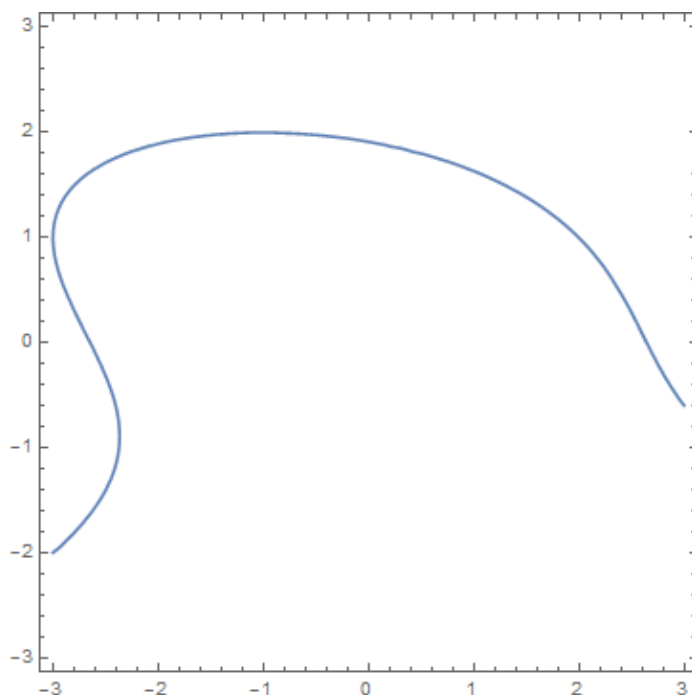
REŠITEV. Imamo funkcijo $f(x, y) = x^2 + xy + y^3 - 7$, krivulja $\mathcal{K}$ je množica ničel te funkcije.

Gradient funkcije f znaša

$$\text{grad} f(x, y) = (2x + y, x + 3y^2),$$

kar nam v točki $(2, -1)$ da vektor $(3, 5)$. Ta je pravokoten na krivuljo, tangento pa je potem vektor $(5, -3)$. Enačba tangentne premice je

$$\vec{r} = (2, 1) + t(5, -3).$$



NALOGA 1.4. Krivuljo $\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ parametriziraj z naravnim parametrom.

REŠITEV. Velja $\dot{\vec{r}}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$, od koder dobimo $|\dot{\vec{r}}(t)| = \sqrt{3}e^t$. Velja

$$s(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(\tau)| d\tau = \sqrt{3}(e^t - 1),$$

od koder dobimo $t = \ln\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right)$. Nato je potem

$$\vec{p}(s) = \vec{r}(t(s)) = \left(\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \cos\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right), \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \sin\left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right), \left(1 + \frac{s}{\sqrt{3}}\right) \right).$$

NALOGA 1.5. Poišči krivuljo, ki gre skozi točko $(1, 0)$ in seka vse poltrake skozi izhodišče pod kotom $\frac{\pi}{4}$.

REŠITEV. Krivuljo parametrizirajmo v polarni obliki $r(\varphi)$:

$$\vec{r}(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi)$$

za primerno izbrano funkcijo $r(\varphi)$. Pogoji, da krivulja poltrake seka pod kotom $\frac{\pi}{4}$ je:

$$dr = r d\varphi \Rightarrow \frac{dr}{r} = d\varphi \Rightarrow r = e^\varphi.$$

NALOGA 1.6. Poišči krivuljo na stožcu $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, ki gre skozi točko $(1, 0, 2)$ in v vsaki točki z vektorjem $(0, 0, 1)$ oklepa kot $\frac{\pi}{4}$.

REŠITEV. Krivuljo parametrizirajmo kot

$$\vec{r}(\varphi) = (r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi, 2r(\varphi)),$$

kjer funkcijo $r(\varphi)$ moramo določiti tako, da bo izpolnjen dani pogoj, ki pa se glasi ravno

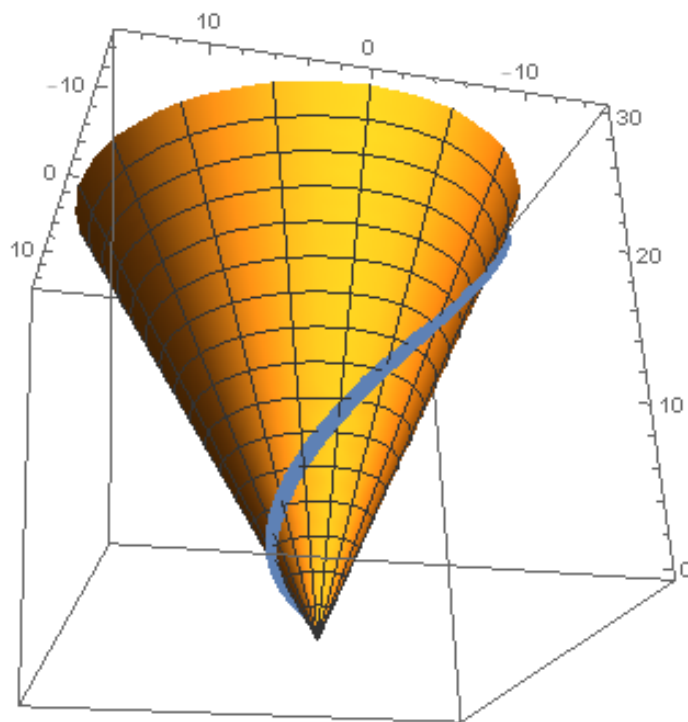
$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vec{r}'(\varphi) \cdot (0, 0, 1)}{|\vec{r}'(\varphi)|}.$$

Po preračunu dobimo ravno pogoj

$$\sqrt{3}r'(\varphi) = r(\varphi),$$

od koder z integriranjem in upoštevanjem pogoja $\varphi(0) = 1$ dobimo iskano rešitev

$$r(\varphi) = e^{\frac{\varphi}{\sqrt{3}}}.$$



NALOGA 1.7. Poišči krivuljo na enotski sferi, ki gre skozi točko $(1, 0, 0)$ in v vsaki točki z vektorjem $(0, 0, 1)$ oklepa kot $\frac{\pi}{4}$.

REŠITEV. Krivuljo parametrizirajmo kot

$$\vec{r}(\lambda) = (\cos \varphi(\lambda) \cos \lambda, \cos \varphi(\lambda) \sin \lambda, \sin \varphi(\lambda)),$$

kjer funkcijo $\varphi(\lambda)$ moramo določiti tako, da bo izpolnjen dani pogoj, ki pa se glasi ravno

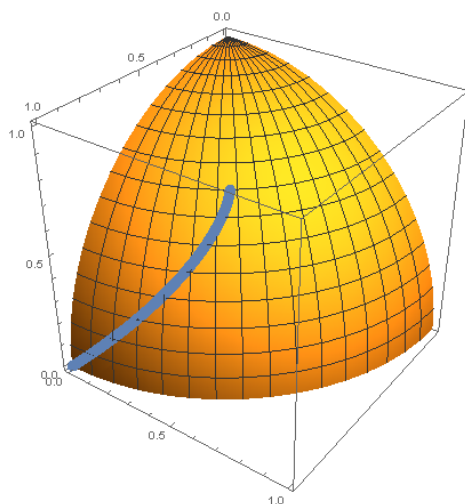
$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\vec{r}'(\lambda) \cdot (0, 0, 1)}{|\vec{r}'(\lambda)|}.$$

Po preračunu dobimo ravno pogoj

$$\varphi' = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2 \cos^2 \varphi - 1}},$$

od koder z integriranjem in upoštevanjem pogoja $\varphi(0) = 0$ dobimo iskano rešitev

$$\lambda(\varphi) = \sqrt{2} \arcsin(\sqrt{2} \sin(\varphi)) - \arctan\left(\frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}\right).$$



NALOGA 1.8. Poišči krivuljo na enotski sferi, ki vsak vzporednik seka pod kotom 45° .

REŠITEV. Glede na dobro narisano skico mora veljati

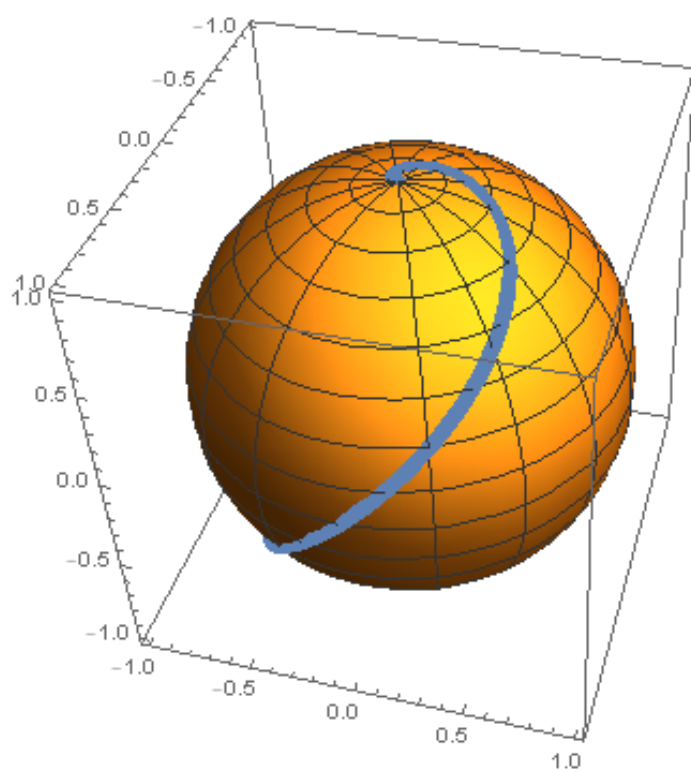
$$\cos \varphi d\lambda = d\varphi \Rightarrow \lambda = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Uporabimo univerzalno substitucijo $t = \tan \frac{\varphi}{2}$:

$$d\varphi = \frac{2 dt}{1+t^2} \quad \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin \varphi = \frac{2t}{1+t^2}$$

od koder dobimo ($\varphi(0) = 0$)

$$\varphi(\lambda) = 2 \arctan\left(\frac{e^\lambda - 1}{e^\lambda + 1}\right).$$



☞ **Parametrizacija.** *Parametrizacija ploskve P je preslikava*

$$\vec{r} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Ploskev P je slika preslikave $\vec{r}$. Parametrizacija regularna, če sta vektorja $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ povsod linearno neodvisna.

☞ **Tangetni vektorji, normalni vektor.** *Naj bo $\vec{r} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna parametrizacija ploskve P .*

Vektorja $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$ sta tangentna vektorja na ploskev P v točki $\vec{r}(u, v)$ in

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

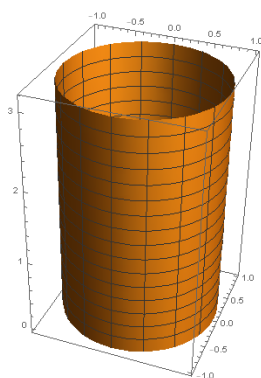
je enotski normalni vektor na ploskev P v točki $\vec{r}(u, v)$.

NALOGE

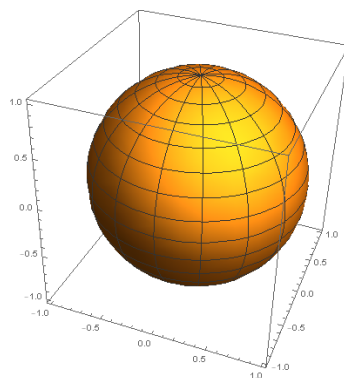
NALOGA 2.1. Parametriziraj:

1. Valj radija R .
2. Sfero S^2 .
3. Torus z radijem a, b .
4. Möbiusov trak, radija R in širine $2a$.

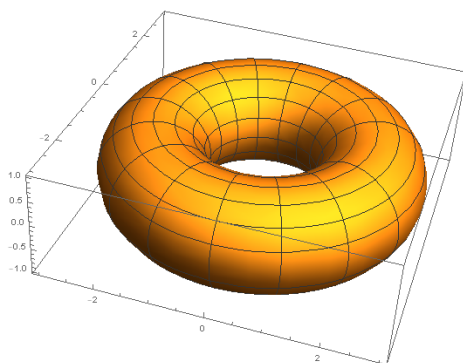
REŠITEV. 1. $\vec{r}(\varphi, z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.



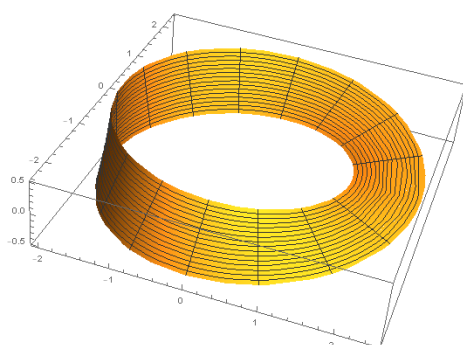
2. $\vec{r}(\varphi, \vartheta) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$.



3. $\vec{r}(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$, $u, v \in [0, 2\pi]$.



4. $\vec{r}(u, v) = ((R + v \cos \frac{u}{2}) \cos u, (R + v \cos \frac{u}{2}) \sin u, v \sin \frac{u}{2}), u \in [0, 2\pi], v \in [-a, a]$



NALOGA 2.2. Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev

$$\vec{r}(u, v) = (a \cos u, a \sin u, b(u + v))$$

v točki $(u, v) = (\pi/4, 1)$.

REŠITEV. Velja

$$\vec{r}_u = (-a \sin u, a \cos u, b) \quad \vec{r}_v = (0, 0, b),$$

kar nam v točki $\vec{r}(\pi/4, 1) = (a \frac{\sqrt{2}}{2}, a \frac{\sqrt{2}}{2}, b(1 + \frac{\pi}{4}))$ da normalni vektor

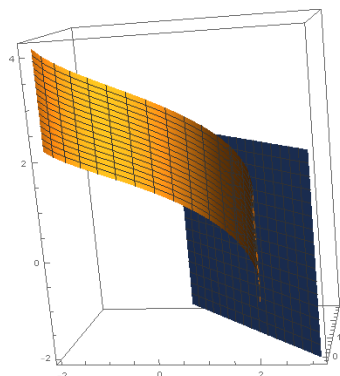
$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (ab \frac{\sqrt{2}}{2}, ab \frac{\sqrt{2}}{2}, 0),$$

oziroma, lahko vzamemo kar

$$\vec{n} = (1, 1, 0).$$

Enačba tangentne ravnine je potem

$$x + y = a\sqrt{2}.$$



NALOGA 2.3. Na več načinov parametriziraj ploskev

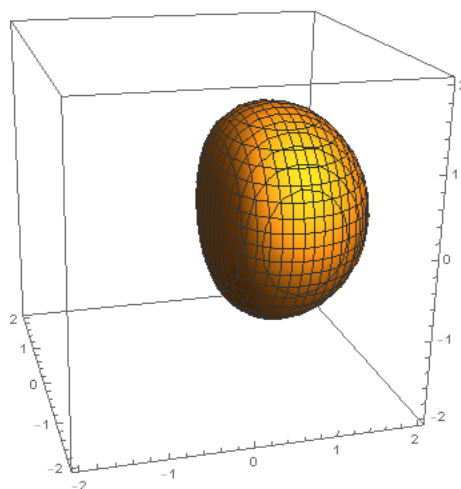
$$P = \{(x, y, z) ; (x^2 + y^2 + z^2) = 8x\}.$$

REŠITEV. Poskusimo z nastavkom

$$\vec{r}(\varphi, \vartheta) = (R(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \cos \varphi, R(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \sin \varphi, R(\varphi, \vartheta) \cos \vartheta),$$

za primerno izbrano funkcijo $R(\varphi, \vartheta)$. To vstavimo v enakost $(x^2 + y^2 + z^2) = 8x$ in dobimo

$$R(\varphi, \vartheta) = 2\sqrt[3]{\sin \vartheta \cos \varphi} \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



NALOGA 2.4. Dana naj bo funkcija $f : U^{odp} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ z lastnostjo, da je $\text{grad}(f) \neq 0$. Pokaži, da je $\text{grad}(f)$ pravokoten na ploskev $f(x, y, z) = C$.

REŠITEV. Denimo, da lahko ploskev parametriziramo z $\vec{r}(u, v)$. Potem velja za vsak u, v

$$f(\vec{r}(u, v)) = 0.$$

Zgornje parcialno odvajamo enkrat po u in drugič po v in dobimo

$$\nabla f \cdot \vec{r}_u = 0 \quad \nabla f \cdot \vec{r}_v = 0,$$

kar pomeni, da je ∇f pravokoten na tangentna vektorja $\vec{r}_u$ in $\vec{r}_v$, torej je res pravokotne na dano ploskev.

NALOGA 2.5. Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev podano implicitno

$$\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

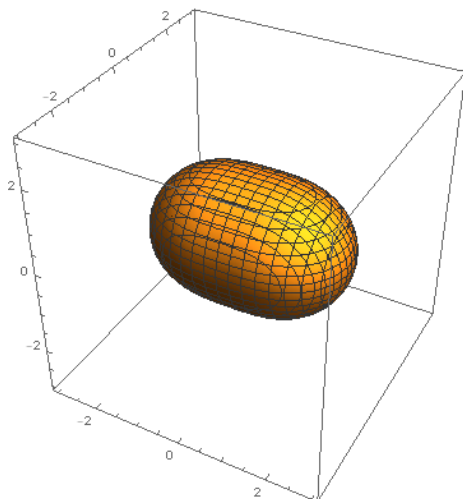
v točki $(1, 1, 1)$.

REŠITEV. Izračunamo gradient funkcije f v točki $(1, 1, 1)$ in dobimo

$$\nabla f(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6^3}}, -\frac{1}{\sqrt{6^3}} - \frac{1}{\sqrt{2^3}}, -\frac{1}{\sqrt{6^3}} - \frac{1}{\sqrt{2^3}}\right).$$

Enačba tangentne ravnine je potem

$$-\frac{2}{\sqrt{6^3}}x + \left(-\frac{1}{\sqrt{6^3}} - \frac{1}{\sqrt{2^3}}\right)y + \left(-\frac{1}{\sqrt{6^3}} - \frac{1}{\sqrt{2^3}}\right)z = -\frac{4}{\sqrt{6^3}} - \frac{2}{\sqrt{2^3}}.$$



Integrali s parametrom

☞ Integrali s parametrom.

1. Naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je funkcija

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

zvezna za vsak $y \in [c, d]$.

2. Naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in zvezno parcialno odvedljiva po spremenljivki y . Potem velja enakost

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

za vsak $y \in [c, d]$.

3. Naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem velja

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

4. Naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna in zvezno parcialno odvedljiva po spremenljivki y ter $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ odvedljivi funkciji. Potem velja

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx = f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx.$$

☞ **Posplošeni integrali s parametrom.** Naj bo $f : [a, \infty) \times [c, d]$ zvezna funkcija in naj posplošeni integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira za vsak $y \in [c, d]$.

☞ **Enakomerna konvergenca.** Posplošeni integral s parametrom $\int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na $[c, d]$, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja število M_0 , da je

$$\left| \int_M^\infty f(x, y) dx \right| < \epsilon$$

za vsak $y \in [c, d]$ in vsak $M \geq M_0$.

✎ **Odvajanje in integriranje posplošenih integralov s parametrom.**

1. Če integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na $[c, d]$, potem je $\int_a^\infty f(x, y) dx$ zvezna funkcija na $y \in [c, d]$.
2. Če integral $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$ konvergira enakomerno na $[c, d]$, potem je

$$\frac{d}{dy} \left(\int_a^\infty f(x, y) dx \right) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

za vsak $y \in [c, d]$.

3. Če integral $\int_a^\infty f(x, y) dx$ konvergira enakomerno na $[c, d]$, potem je

$$\int_c^d \left(\int_a^\infty f(x, y) dx \right) dy = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

✎ **Weierstrassov kriterij.** Denimo, da obstaja funkcija W , da velja

$$|f(x, y)| \leq W(x) \quad \text{za vsak } y \in [c, d].$$

Če konvergira integral $\int_a^\infty W(x) dx$, potem integral

$$\int_a^\infty f(x, y) dx$$

konvergira enakomerno na $[c, d]$.

✎ **Gama funkcija.** Gama funkcija je definirana za $a > 0$ z izrazom

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx.$$

Velja

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

in

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad a \in (0, 1).$$

✎ **Beta funkcija.** Beta funkcija je definirana za $a, b > 0$ z izrazom

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx.$$

Velja

$$B(1, 1) = 1 \quad B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) \quad \text{za } (b > 1)$$

in

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

NALOGE

NALOGA 3.1. Izračunaj integral s parametrom

$$F(y) = \int_0^1 e^{xy} dx$$

Ali je F zvezna funkcija?

REŠITEV. Velja $F(y) = \int_0^1 e^{xy} dx = \frac{e^y - 1}{y}$ in $F(0) = 1$. Direktno se vidi, da je

$$\lim_{y \rightarrow 0} F(y) = F(0) = 1,$$

torej je F zvezna funkcija. To se v resnici vidi že iz dejstva, da imamo integral zvezne funkcije v končnih mejah, torej je F zvezna za vse $y \in [c, d]$, kjer je $[c, d]$ poljuben interval.

NALOGA 3.2. Dan je integral s parametrom

$$F(y) = \int_{1+y^2}^{e^y} \frac{1}{x^2 + y^2} dx.$$

Izračunaj odvod $F'(y)$.

REŠITEV. Uporabimo formulo za odvajanje integrala s parametrom, ki ima nekonstantne meje

$$F'(y) = e^y \frac{1}{e^{2y} + y^2} - \frac{2y}{(1 + y^2)^2 + y^2} + \int_{1+y^2}^{e^y} \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

NALOGA 3.3. Dan je integral s parametrom

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1 + xy)}{x} dx.$$

Izračunaj odvod $F'(y)$.

REŠITEV. Integral lahko direktno odvajamo, lahko pa tudi vpeljemo novo spremenljivko $x = yt$, od koder dobimo $dx = y dt$ in

$$F(y) = \int_0^1 \frac{\log(1 + y^2 t)}{t} dt.$$

Za katere $y \in \mathbb{R}$ zgornji integral obstaja?

Velja $F(0) = 0$, torej za $y = 0$ obstaja. Za $y \neq 0$ pa imamo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1 + y^2 t)}{t} = y^2,$$

tako da imamo pod integralom (pri fiksnem y) zvezno in omejeno funkcijo spremenljivke t (pri $t = 0$ jo zvezno razširimo z vrednostjo y^2). Pod integralom imamo torej funkcijo

$$f(t, y) = \begin{cases} \frac{\log(1 + y^2 t)}{t^2} & ; \quad t \in (0, 1] \quad y \in \mathbb{R} \\ y^2 & ; \quad t = 0 \quad y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

To je zvezna funkcija na $(t, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, saj je

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (0,y_0)} f(t, y) = \lim_{(t,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{\log(1+y^2t)}{t} = \lim_{(t,y) \rightarrow (0,y_0)} y^2 - \frac{1}{2}ty^4 + \dots = y_0^2 = f(0, y_0),$$

saj zgornja potenčna vrsta konvergira za $|ty^2| < 1$, kar pomeni, da je zvezna funkcija in je njena limita kar vrednost potenčne vrste v dani točki.

Določimo še $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \begin{cases} \frac{2y}{1+ty^2} & ; \quad t \in (0, 1] \quad y \in \mathbb{R} \\ 2y & ; \quad t = 0 \quad y \in \mathbb{R} \end{cases} = \frac{2y}{1+ty^2}$$

(tu $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ izračunamo po definiciji). Ker je torej $\frac{\partial f}{\partial y}$ zvezna funkcija velja (iz teorije)

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{2y}{1+ty^2} dt = \frac{2 \ln(1+y^2)}{y}.$$

To velja za $y \neq 0$, medtem ko je $F'(0) = 0$ in direktno lahko preverimo, da je tudi F' zvezna funkcija (sledi pa tudi iz teorije).

NALOGA 3.4. S pomočjo zamenjave vrstnega reda integracije izračunaj

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad a, b > 0.$$

REŠITEV. Integral $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ konvergira za poljubna $a, b > 0$, saj je

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a,$$

in res zmeraj integriramo omejeno zvezno funkcijo.

Integral lahko zapišemo kot

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \log \left(\frac{b+1}{a+1} \right).$$

Opazimo, da vrstni red integracije lahko zamenjamo, ker je x^y zvezna na $[0, 1] \times [a, b]$.

NALOGA 3.5. Preveri, da integral

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{1+x^2} dx$$

enakomerno konvergira na $y \in [0, \infty)$.

REŠITEV. Po Weierstrassovem kriteriju ocenimo

$$\frac{e^{-xy}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \quad y \in [0, \infty).$$

Ker integral $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ konvergira, to pomeni, da $F(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{1+x^2} dx$ konvergira enakomerno na $[0, \infty)$.

NALOGA 3.6. Izračunaj integral

$$F(y) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xy}}{xe^x} dx$$

za $y \in [0, \infty)$.

REŠITEV. Velja $F(0) = 0$, poleg tega pa je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-xy}}{xe^x} = y$, torej je integrand omejena funkcija pri $x = 0$. Za konvergenco pri $x \rightarrow \infty$ pa lahko pišemo

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-xy}}{xe^x} dx = \int_1^\infty \frac{x^2 \frac{1 - e^{-xy}}{xe^x}}{x^2} dx$$

in velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \frac{1 - e^{-xy}}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(1 - e^{-xy})}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-xy}) = 0,$$

torej po kriteriju o konvergenci posplošenih integralov res konvergira.

Velja pa tudi

$$F'(y) = \int_0^\infty e^{-x(y+1)} dx = \frac{1}{1+y},$$

saj iz ocene $e^{-x(y+1)} \leq e^{-x}$ po Weierstrassovem kriteriju sledi, da $\int_0^\infty e^{-x(y+1)} dx$ enakomerno konvergira na $[0, \infty)$.

Nazadnje velja $F(y) = \log(1+y) + C$, ker pa je $F(0) = 0$ dobimo $C = 0$, oziroma

$$F(y) = \log(1+y).$$

NALOGA 3.7. Izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

za $0 < a < b$.

REŠITEV. Če je $a = b$, potem je vrednost integrala enaka 0. Predpostavimo sedaj, da je $a \neq b$.

Naj bosta $a, b > 0$. Potem je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = b - a$, tako da je integrand omejena funkcija pri $x = 0$. Integral pa konvergira tudi pri $x = \infty$, saj imamo ocene

$$\int_1^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \leq \int_1^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

Če je $a = 0$ in $b > 0$, potem integral konvergira pri $x = 0$, ne pa pri $x = \infty$.

Če $a < 0$ in $b > 0$ integral konvergira pri $x = 0$, ne pa pri $x = \infty$.

Če $a < 0$ in $b = 0$ integral konvergira pri $x = 0$, ne pa pri $x = \infty$.

Če $a < 0$ in $b < 0$ integral konvergira pri $x = 0$, ne pa pri $x = \infty$.

Torej integral $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ res obstaja le za $a, b > 0$.

Zapišemo ga lahko kot

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_0^\infty \left(\int_a^b e^{-xy} dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_0^\infty e^{-xy} dx \right) dy =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{y} dy = \log \frac{b}{a}.$$

Zamenjava vrstnega reda integriranja je bila upravičena, saj $\int_0^\infty e^{-xy} dx$ konvergira enakomerno na $[a, b]$ ($a, b > 0$). Res

$$e^{-xy} \leq e^{-ax}$$

in ker $\int_0^\infty e^{-ax} dx$ konvergira, $\int_0^\infty e^{-xy} dx$ konvergira enakomerno na $[a, b]$.

NALOGA 3.8. Naj bo $F(a) = \int_0^{\pi/2} \log(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x) dx$. Izračunaj $F(a)$!

REŠITEV. Velja $F(\pm 1) = 0$ in $F(0) = -\pi \log 2$ (glej Analiza 2). Za vsak $a \neq 0$ pa je funkcija $\log(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x)$ zvezna in povsod definirana na $[0, \pi/2]$, torej je F definirana za vsak $a \in \mathbb{R}$.

$F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a \cos^2 x}{a^2 \cos^2 x + \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2a}{a^2 + \tan^2 x} dx$. Vpeljemo $u = \tan x$ in dobimo najprej nedoločeni integral

$$\int \frac{2a du}{(a^2 + u^2)(1 + u^2)} = \frac{2(a \arctan u - \arctan(\frac{u}{a}))}{a^2 - 1}.$$

Za $a > 0$ dobimo $F'(a) = \frac{\pi}{a+1}$ in za $a < 0$ dobimo $F'(a) = \frac{\pi}{a-1}$. Od tod dobimo

$$F(a) = \pi \log |1 + a| - \pi \log 2 = \pi \log \left| \frac{a+1}{2} \right|.$$

Preverimo še enakomerne konvergence. Naj bo $a \in [0, 1]$. Potem je

$$\log(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x) \leq 0$$

in ker je $\ln$ naraščajoča funkcija velja

$$|\log(a^2 \cos^2 x + \sin^2 x)| \leq |\ln \sin^2 x| \quad a \in [0, 1]$$

ker pa $\int_0^{\pi/2} |\ln \sin^2 x| dx$ konvergira, po Weierstrassovem kriteriju dobimo, da $F(a)$ konvergira enakomerno za $a \in [0, 1]$. Za $a \in [1, c]$ kjer je c poljubno realno število, pa je $F(a)$ zvezna funkcija (sploh ni več posplošeni integral s parametrom). Torej je (upoštevamo še sodost) $F(a)$ zvezna za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Pokažimo sedaj, da $\int_0^{\pi/2} \frac{2a}{a^2 + \tan^2 x} dx$ konvergira enakomerno na poljubnem intervalu $[c, d] \subset (0, \infty)$. Velja

$$\int_0^b \frac{2a}{a^2 + \tan^2 x} dx \leq \int_0^b \frac{2d}{c^2} dx < \epsilon$$

za dovolj majhen b . Naj bo sedaj $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Velja

$$\int_0^b \frac{2a}{a^2 + \tan^2 x} dx = \frac{2(ab - \arctan(\frac{\tan b}{a}))}{a^2 - 1}.$$

Naj bo b poljubno majhno pozitivno (fiksno) število. Potem je

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{2(ab - \arctan(\frac{\tan b}{a}))}{a^2 - 1} = \pm \pi$$

(odvisno od tega ali vzamemo levo ali desno limito), kar pomeni, da bomo med $a \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ zmeraj lahko našli kakšnega, da bo

$$|\int_0^b \frac{2a}{a^2 + \tan^2 x} dx| \geq \epsilon,$$

in v bistvu integral ne konvergira enakomerno okoli nobenega intervala, ki vsebuje 0. Kljub temu pa velja $F'(a) = \frac{\pi}{a+1}$ ($a > 0$).

Imamo torej (za $a > 0$) $F'(a) = \frac{\pi}{a+1}$, torej $F(a) = \pi \log(a+1) + C$, ki pa se morata ujemati tudi v $a = 0$ (F je zvezna). Torej (če se sodo razširimo) $F(a) = \pi \log \frac{|a|+1}{2}$.

NALOGA 3.9. Naj bo $I(m) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + m^2} dx$. Ali lahko izračunamo $I'(0)$ z metodo odvajanja pod integralom?

REŠITEV. Integral $I(m)$ lahko direktno izračunamo (per-partes) in dobimo

$$I(m) = m \arctan \frac{1}{m} + \log \sqrt{1 + m^2} - 1,$$

od koder dobimo da $I'(0)$ ne obstaja.

Če pa odvajamo pod integralom pa dobimo

$$\int_0^1 \frac{2m}{x^2 + m^2} dx,$$

katerega vrednost pri $m = 0$ je enaka 0.

Integral $\int_0^b \frac{2m}{x^2 + m^2} dx = 2 \arctan \frac{b}{m}$, tako da velja

$$|\int_0^b \frac{2m}{x^2 + m^2} dx| = 2 |\arctan \frac{b}{m}| \geq \epsilon,$$

če je m dovolj blizu 0, torej res ne konvergira lokalno enakomerno okoli $m = 0$.

NALOGA 3.10. Izračunaj integral s pomočjo odvajanja in preveri vse enakomerne konvergence za $a \in \mathbb{R}$

$$J(a) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{xe^x} dx.$$

REŠITEV. Velja $J(0) = 0$, za $a \neq 0$, je $\frac{1 - \cos ax}{xe^x}$ omejena pri $x = 0$, integral $\int_1^\infty \frac{1 - \cos ax}{xe^x} dx \leq \int_1^\infty \frac{2}{e^x}$ pa konvergira, tako da je $J(a)$ definiran za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Odvod $J'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x} dx = \frac{a}{a^2 + 1}$ in od tod

$$J(a) = \frac{1}{2} \log(a^2 + 1).$$

Poglejmo, če so vsi koraki upravičeni. Integral $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x} dx$ konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$, saj je

$$|\frac{\sin(ax)}{e^x}| \leq e^{-x} \text{ za vsak } a \in \mathbb{R},$$

torej je $J'(a) = \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x} dx = \frac{a}{a^2+1}$. Od tod dobimo

$$J(a) = \int \frac{a}{a^2+1} da = \frac{1}{2} \ln(a^2+1) + C,$$

ker pa je $J(a) = 0$, dobimo $C = 0$ in s tem

$$J(a) = \frac{1}{2} \ln(a^2+1) \quad a \in \mathbb{R}.$$

NALOGA 3.11. Izračunaj $I(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} dx$.

REŠITEV. Funkcija $I(a)$ je liha, tako da se osredotočimo le na $a \geq 0$. Velja $I(0) = 0$, integrand je omejena funkcija tako pri $x = 0$ kot pri $x = \frac{\pi}{2}$, tako da je $I(a)$ definiran za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Če odvajamo pod integralom (po spr. a) dobimo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \tan^2 x} = \frac{\pi}{2(a+1)}$$

in od tod $I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a+1)$ za $a \geq 0$ (in ustrezno liho razširjeno na $a < 0$).

Poglejmo še, če so vsi koraki upravičeni. Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \tan^2 x}$ očitno enakomerno konvergira na $\mathbb{R}$, saj je

$$\left| \frac{1}{1+a^2 \tan^2 x} \right| \leq 1 \quad \text{za vsak } a \in \mathbb{R}.$$

Torej je $I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \tan^2 x}$ za vsak $a \in \mathbb{R}$. Dobimo za $a > 0$

$$I'(a) = \frac{\pi}{2(a+1)} \implies I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(a+1)$$

ker pa je I liha funkcija imamo

$$I(a) = \operatorname{sgn}(a) \frac{\pi}{2} \ln(|a|+1).$$

NALOGA 3.12. Izračunaj $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

REŠITEV. Poglejmo si integral s parametrom ($a \in [0, 1]$)

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2} dx.$$

Potem je

$$F'(a) = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+ax)} dx = \frac{a\pi + \log 4}{4(1+a^2)} - \frac{\log(1+a)}{(1+a^2)}.$$

Ker je $F(0) = 0$ imamo naslednjo zvezo

$$F(1) = \int_0^1 F'(a) da = \int_0^1 \frac{a\pi + \log 4}{4(1+a^2)} da - \int_0^1 \frac{\log(1+a)}{(1+a^2)} da = \int_0^1 \frac{a\pi + \log 4}{4(1+a^2)} da - F(1).$$

Torej je

$$F(1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{a\pi + \log 4}{4(1+a^2)} da = \frac{\pi}{8} \log 2.$$

NALOGA 3.13. Naj bo $I(m) = \int_{a+m}^{b+m} \frac{\sin mx}{x} dx$. Izračunaj $I'(m)$!

REŠITEV.

NALOGA 3.14. Naj bo $I(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy$. Izračunaj $I'(m)$!

REŠITEV.

NALOGA 3.15. $F(t) = \int_t^{\cos t} e^{t \cos x} \tan x dx$. Izračunaj $F'(0)$.

REŠITEV.

NALOGA 3.16. Dana naj bo funkcija

$$I(m) = \int_0^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx,$$

kjer je f zvezna na $[0, 1]$. Ali je I zvezna na $\mathbb{R}$?

REŠITEV. Velja $I(0) = 0$, ter za $m \in [c, d] \subset (0, \infty)$ imamo

$$\left| \int_0^b \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx \right| \leq M_0 d / c^2 b < \epsilon$$

če je b dovolj majhen (M_0 je maksimum funkcije f). Torej I lokalno enakomerno konvergira okoli vsake točke $m \neq 0$, torej je I zvezna na $\mathbb{R} - \{0\}$.

Naj bo $f(0) = 0$, potem je

$$\left| \int_0^b \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx \right| = \max_{x \in [0, b]} (|f|) \arctan\left(\frac{b}{m}\right) \leq \max_{x \in [0, b]} (|f|) \frac{\pi}{2}.$$

Ker je f zvezna je $\lim_{b \rightarrow 0} \max_{x \in [0, b]} (|f|) = 0$, je res potem $\left| \int_0^b \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx \right| < \epsilon$ za dovolj majhen b .

Torej $I(m)$ konvergira lokalno enakomerno okoli $m = 0$, kar pomeni, da je $I(m)$ povsod zvezna.

Če pa je $f(x) \neq 0$, potem v splošnem $I(m)$ ni zvezna, npr. za $f(x) = 1$, dobimo $I(m) = \arctan \frac{1}{m}$ in $I(0) = 0$, kar pa ni zvezna funkcija.

Tudi v splošnem velja, da $I(m)$ ni zvezna v $m = 0$, če $f(0) \neq 0$. Denimo, da je $f(0) = 2a > 0$. Potem obstaja $\delta > 0$, da je $f(x) \geq a$ za $x \in [0, \delta]$. Integral $I(m)$ zapišimo kot vsoto

$$\int_0^\delta \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx + \int_\delta^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx.$$

Integral $\int_\delta^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx$ je običajni **ne**-posplošeni, tako da je

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int_\delta^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx = 0.$$

Integral $\int_0^\delta \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx$ pa lahko ocenimo kot

$$\left| \int_\delta^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx \right| \geq a \left| \int_0^\delta \frac{m}{m^2 + x^2} dx \right| = a \left| \arctan \frac{\delta}{m} \right| \quad \text{za vsak } m \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

To pa pomeni, da je

$$\lim_{m \rightarrow 0} \left| \int_{\delta}^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx \right| \geq a \frac{\pi}{2}.$$

Torej, če $f(0) \neq 0$, velja

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx \neq 0,$$

kar pomeni, da $\lim_{m \rightarrow 0} I(m) \neq I(0)$ in $I(m)$ ni zvezna v $m = 0$.

NALOGA 3.17. $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{y+1} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$

REŠITEV.

NALOGA 3.18. $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos xy \, dx$

REŠITEV.

NALOGA 3.19. $I_n(y) = \int_0^1 x^y (\log x)^n \, dx$ ($y > -1$) in $n = 0, 1, 2, \dots$

REŠITEV. Integrali konvergirajo za vsak $n = 1, 2, 3, \dots$ in $y > -1$. Velja

$$I'_n(y) = \int_0^1 x^y (\log x)^{n+1} \, dx = I_{n+1}(y).$$

Velja $I_0(y) = \frac{1}{1+y}$, od koder dobimo $I_1(y) = \frac{-1}{(1+y)^2}, \dots, I_n(y) = \frac{(-1)^n n!}{(1+y)^{n+1}}$.

Poglejmo še, če so vsi koraki upravičeni. Potrebno je preveriti, če integrali $I_n(y) = \int_0^1 x^y (\log x)^n \, dx$ lokalno enakomerno konvergirajo. Res, naj bo $[-c, d] \subset (-1, \infty)$. Potem je

$$|x^y (\log x)^n| \leq \frac{|\log x|^n}{x^c},$$

integral $\int_0^1 \frac{|\log x|^n}{x^c} \, dx$ konvergira, tako da imamo lokalno enakomerno konvergenco.

NALOGA 3.20. Dan je integral s parametrom

$$J(y) = \int_1^\infty \frac{\log x (2y)^x}{x} \, dx.$$

Za katere $y \geq 0$ integral konvergira in pokaži, da konvergira enakomerno na vsakem intervalu $[0, c] \subset [0, \frac{1}{2})$. Ali lahko izračunamo $J'(a)$ s pomočjo metode odvajanja pod integralom?

REŠITEV. Če je $y \in [0, \frac{1}{2})$ potem konvergira, za ostalo pa divergira.

Na $[0, c]$ konvergira enakomerno po Weierstrassovem kriteriju.

Ali je $J'(y) = 2 \int_1^\infty \log x (2y)^{x-1} \, dx$? Res, po Weierstrassu enakomerno konvergira na vsakem intervalu $[0, c] \subset [0, \frac{1}{2})$ tako, da res za vsako točko $y \in [0, \frac{1}{2})$ velja

$$J'(y) = 2 \int_1^\infty \log x (2y)^{x-1} \, dx.$$

NALOGA 3.21. Dan je integral s parametrom

$$J(y) = \int_1^{\infty} \frac{y^x}{xy^x + x^2} dx.$$

Za katere $y \geq 0$ integral konvergira in pokaži, da konvergira enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Ali lahko izračunamo $J'(a)$ s pomočjo metode odvajanja pod integralom?

REŠITEV. Če je $y \in [0, 1]$ potem konvergira, za ostalo pa divergira.

Na $[0, 1]$ konvergira enakomerno po Weierstrassovem kriteriju.

Ali je $J'(y) = 2 \int_1^{\infty} \frac{xy^{x-1}}{(x+y^x)^2} dx$? Integral konv. le še za $y \in [0, 1)$. Po Weierstrassu enakomerno konvergira na vsakem intervalu $[0, c] \subset [0, 1)$ tako, da za vsako točko $y \in [0, 1)$ velja

$$J'(y) = 2 \int_1^{\infty} \frac{xy^{x-1}}{(x+y^x)^2} dx.$$

NALOGA 3.22. Pokaži, da velja

$$B(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx.$$

REŠITEV. Uvedi novo spremenljivko $x = \frac{t}{t+1}$.

NALOGA 3.23. Pokaži, da velja

$$B(a, b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}(x) \cos^{2b-1}(x) dx.$$

REŠITEV. Uvedi novo spremenljivko $x = \cos^2 t$.

NALOGA 3.24. S pomočjo Gama in Beta funkcije izračunaj integrale:

1. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$
2. $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$
3. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$
4. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx$

REŠITEV. 1. Uvedemo novo spremenljivko $u = \frac{x}{a}$ in dobimo $a^4 \int_0^1 u^2 \sqrt{1-u^2} du$, nato pa še $t = u^2$ in dobimo

$$\frac{a^4}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t} dt = \frac{a^4}{2} B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})^2}{\Gamma(2)} = \left(\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

2. Uvedemo $t = x^4$.

3. Uvedemo $t = 1 - x^4$.

4. $2a - 1 = 6$, torej $a = \frac{7}{2}$ in $2b - 1 = 4$, torej $b = \frac{5}{2}$.

NALOGA 3.25. Pokaži, da velja

$$\Gamma(a)\Gamma(a + \tfrac{1}{2}) = 2^{1-2a}\sqrt{\pi}\Gamma(2a).$$

REŠITEV. Glej wolfram duplication formula...

$$B(a, a) =$$

NALOGA 3.26. Izračunaj integral

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{x^a \log(x)}{1+x^2} dx.$$

REŠITEV. Naj bo $J(a) = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2} dx$. Potem je $J'(a) = I(a)$, tu pa uvedemo $t = x^2$ in rešimo. Potem še odvajamo in dobimo $I(a)$.

$$J(a) = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi a}{2}}.$$

Dvojni integral

☞ Dvojni integral. Fubijev izrek.

1. Naj bo $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je

$$\iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

2. Območje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ naj bo dano z

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \quad (\varphi, \psi \text{ zvezni funkciji})$$

in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

☞ **Zamenjava spremenljivk.** Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dano območje in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna preslikava. Dana naj bo zvezno parcialno odvedljiva bijektivna preslikava ($\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$)

$$\begin{aligned} \Psi &: \Delta \rightarrow D \\ \Psi(\xi, \mu) &= (x(\xi, \mu), y(\xi, \mu)). \end{aligned}$$

Naj bo $J\Psi = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\mu \\ y_\xi & y_\mu \end{bmatrix}$ Jacobijeva matrika preslikave Ψ , za katero predpostavljamo, da je povsod na Δ nesingularna, $|J\Psi|$ pa naj bo absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike. Potem je

$$\iint_\Delta f(\Psi(\xi, \mu)) |J\Psi(\xi, \mu)| \, d\xi \, d\mu = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

✎ **Polarne koordinate.** Naj bo preslikava $\Psi : (r, \varphi) \mapsto (x, y)$ dana z $x = r \cos \varphi$ in $y = r \sin \varphi$, potem je

$$|J\Psi| = r.$$

✎ **Posplošeni dvojni integral.**

1. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki je bodisi neomejena na D , ali pa je območje D neomejeno. Potem je

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy,$$

kjer je $D_n \subseteq D$ poljubno zaporedje omejenih območij, da je f integrabilna na D_n in območja D_n izčrpajo območje D . Če limita obstaja za poljubno zaporedje območij pravimo, da integral konvergira, sicer pa divergira.

2. V posebnem primeru, da je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ pozitivna funkcija in da $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy$ obstaja za neko zaporedje območij, potem integral konvergira (limita je enaka za poljubno zaporedje območij D_n).
3. Naj bo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ takšna, da obstaja posplošeni integral $\iint_D |f(x, y)| dx dy$. Potem velja

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) dx dy,$$

kjer je $D_n \subseteq D$ poljubno zaporedje omejenih območij, da je f integrabilna na D_n in območja D_n izčrpajo območje D .

4. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ takšna, da konvergira katerikoli od integralov

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dx dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dy, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx.$$

Potem velja

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

NALOGE

NALOGA 4.1. Izračunaj

$$\iint_{[0,1] \times [-1,3]} e^{x+y} dx dy.$$

REŠITEV.

$$\iint_{[0,1] \times [-1,3]} e^{x+y} dx dy = \int_0^1 e^x dx \int_{-1}^3 e^y dy = (e-1)(e^3 - e^{-1}).$$

NALOGA 4.2. Prevedi $\iint_D f(x,y) dx dy$ na dvakratni integral, če

- D pravokotnik določen z oglišči $(0,0), (2,0), (2,1), (0,1)$
- D trikotnik določen z oglišči $(0,0), (1,0), (1,1)$
- D trapez določen z oglišči $(0,0), (2,0), (1,1), (0,1)$
- D paralelogram določen z oglišči $(1,2), (2,4), (2,7), (1,5)$
- D območje določeno z $y = x^2, y = 1$ in $y = x + 1$

REŠITEV. - D pravokotnik določen z oglišči $(0,0), (2,0), (2,1), (0,1)$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 f(x,y) dy.$$

- D trikotnik določen z oglišči $(0,0), (1,0), (1,1)$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x f(x,y) dy.$$

- D trapez določen z oglišči $(0,0), (2,0), (1,1), (0,1)$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y) dx.$$

- D paralelogram določen z oglišči $(1,2), (2,4), (2,7), (1,5)$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_1^2 dx \int_{2x}^{2x+3} f(x,y) dy.$$

- D območje določeno z $y = x^2, y = 1$ in $y = x + 1$

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^0 dx \int_{x^2}^{x+1} f(x,y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x,y) dy.$$

NALOGA 4.3. Izračunaj

$$\iint_D x e^y dx dy$$

kjer je D trikotnik določen z oglišči $(0,0), (1,0), (1,1)$.

REŠITEV.

$$\iint_D x e^y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x x e^y dy = \int_0^1 x e^y \Big|_0^x dx = \int_0^1 x(e^x - 1) dx = \frac{1}{2}.$$

NALOGA 4.4. Izračunaj

$$\iint_{|x| \leq 1, y \in [0, 2]} \sqrt{|y - x^2|} dx dy.$$

REŠITEV. Dobimo

$$\begin{aligned} & \iint_{|x| \leq 1, y \in [0, 2]} \sqrt{|y - x^2|} dx dy = \\ & \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = \\ & \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx + \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx = \\ & = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt + \frac{1}{3} = \frac{10 + 3\pi}{6}. \end{aligned}$$

NALOGA 4.5. Zamenjaj vrstni red integriranja

$$\begin{aligned} & \int_0^4 dx \int_{3x}^{12x} f(x, y) dy \\ & \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy \\ & \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx \end{aligned}$$

REŠITEV. •

$$\int_0^4 dx \int_{3x}^{12x} f(x, y) dy = \int_0^{12} dy \int_0^{\frac{y}{3}} f(x, y) dx + \int_{12}^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^4 f(x, y) dx.$$

•

$$\begin{aligned} & \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \\ & + \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{2\sqrt{2}a} dy \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

•

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx = \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

NALOGA 4.6. Zamenjaj vrstni red integracije v dvakratnem integralu

$$\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

REŠITEV.

$$\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx.$$

NALOGA 4.7. Izračunaj dvojni integral

$$\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

kjer je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq x, y \leq x\sqrt{3}\}$.

REŠITEV. Uporabimo polarne kooordinate $r \in [0, a]$ in $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ in dobimo

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^a r \sqrt{1 - r^2} dr = \frac{\pi a^3}{36}.$$

NALOGA 4.8. Izračunaj dvojni integral

$$\iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy,$$

kjer je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2y \geq x^2, y \leq x\}$.

REŠITEV. Funkcija je pozitivna, zato je

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^x \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \frac{x}{2} \right) dx = \ln 2. \end{aligned}$$

NALOGA 4.9. Izračunaj

$$\iint_D \frac{xy}{x + y} dx dy$$

kjer je D območje omejeno z $x \geq 0, y \geq 0, y \leq x^2 - x$ in $x \leq y^2 - y$. Preveri, da uvedba novih spremenljivk

$$x = (u + v)u \quad y = (u + v)v$$

preslika $\Delta = \{(u, v) \mid u, v \in [0, 1]\}$ v območje D .

REŠITEV. Preslikava $\phi : [0, \infty)^2 \rightarrow [0, \infty)^2$, dana s predpisom

$$\phi(u, v) = (u(u + v), v(u + v))$$

ima inverz dan z $\phi^{-1}(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{x+y}}, \frac{y}{\sqrt{x+y}})$ torej je ϕ injektivna. Preverimo lahko, da se robovi $[0, 1]^2$ slikajo v robove D , ter za eno notranjo točko v $[0, 1]^2$ preverimo, da se slika v notranjost D , kar pomeni, da se $[0, 1]^2$ slika točno na D (če bi se kakšna točka slikala v zunanost, bi imeli še eno točko, ki se slika na rob kar po injektivnosti ni možno).

Pri zamenjavi spremenljivk velja $dx dy \rightarrow 2(u+v)^2 du dv$.

Dobimo

$$\iint_D \frac{xy}{x+y} dx dy = \int_0^1 du \int_0^1 2(u+v)^2 \frac{uv(u+v)^2}{(u+v)^2} dv = \frac{17}{18}.$$

NALOGA 4.10. Izračunaj $\iint_D x^2 y dx dy$, kjer je

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq ay\} \quad (a > 0).$$

REŠITEV. Uporabimo običajne polarne koordinate in dobimo $r = a \sin \varphi$.

Dobimo

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 y dx dy &= \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a \sin \varphi} r^4 \sin \varphi \cos^2 \varphi dr = \\ &= \frac{a^5}{5} \int_0^\pi \sin^6 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi a^5}{128}. \end{aligned}$$

NALOGA 4.11. Pokaži, da posplošeni dvojni integral

$$\iint_{[1, \infty] \times [1, \infty]} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

divergira.

Izračunaj dvakratna integrala

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx.$$

(Za pomoč: velja $-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan(\frac{y}{x}) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$)

REŠITEV. Uporabimo območje oblike $x \in [1, kR]$ in $y \in [1, R]$ za različne k in za $R \rightarrow \infty$ dobimo različne rezultate:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^{kR} dx \int_1^R \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \arctan k - \frac{\pi}{4}.$$

Velja

$$\int_1^\infty dx \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4} \quad \int_1^\infty dy \int_1^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

NALOGA 4.12. Izračunaj površino lika omejenega z $r = 4(1 + \cos \varphi)$ in $r \cos \varphi = 3$.

REŠITEV. Velja $4(1 + \cos \varphi) = \frac{3}{\cos \varphi}$ za $\varphi = \frac{\pi}{3}$ in $\varphi = -\frac{\pi}{3}$.

$$P = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{3}{\cos \varphi}}^{4(1+\cos \varphi)} r \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 16(1 + \cos \varphi)^2 - \frac{9}{\cos^2 \varphi} \, d\varphi = 9\sqrt{3} + 8\pi.$$

NALOGA 4.13. Izračunaj težišče lika omejenega z $x^2 + y^2 = R^2$, $y = 0$ in $y = x \tan \alpha$.

REŠITEV.

$$x_T = \frac{\int_0^\alpha d\varphi \int_0^R r r \cos \varphi \, dr}{\int_0^\alpha d\varphi \int_0^R r \, dr} = \frac{\frac{R^3 \sin \alpha}{3}}{\frac{R^2 \alpha}{2}} = \frac{2 \sin \alpha}{3 \alpha}.$$

$$y_T = \frac{\int_0^\alpha d\varphi \int_0^R r r \sin \varphi \, dr}{\int_0^\alpha d\varphi \int_0^R r \, dr} = \frac{\frac{R^3 (1 - \cos \alpha)}{3}}{\frac{R^2 \alpha}{2}} = \frac{2R}{3} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}.$$

NALOGA 4.14. Določi težišče homogenega lika omejenega z $2x = y^2$ in $x + y = 4$.

REŠITEV.

$$x_T = \frac{\int_{-4}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} x \, dx}{\int_{-4}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} dx} = \frac{288}{90}.$$

$$y_T = \frac{\int_{-4}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} y \, dx}{\int_{-4}^2 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{4-y} dx} = -1.$$

NALOGA 4.15. Izračunaj vztrajnostni moment lika omejenega z $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, okoli z -osi.

REŠITEV. Velja

$$J_z = \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy.$$

Uporabimo eliptične koordinate $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$, kjer $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ in absolutna vrednost Jacobijeve determinante znaša abr .

Dobimo

$$J_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (a^2 r^2 \cos^2 \varphi + b^2 r^2 \sin^2 \varphi) abr \, dr =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{4} \right) d\varphi = \frac{\pi ab(a^2 + b^2)}{4}.$$

Trojni integral

☞ Trojni integral.

1. Naj bo $f : [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je

$$\iint_{[x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]} f(x, y) \, dx \, dy \, dz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

2. Območje $D \subseteq \mathbb{R}^2$ naj bo dano z

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z \in [\varphi(x, y), \psi(x, y)]\} \quad (\varphi, \psi \text{ zvezni funkciji})$$

in $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Potem je

$$\iint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) \, dz.$$

☞ Zamenjava spremenljivk. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^3$ dano območje in $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna preslikava. Dana naj bo zvezno diferenciablena bijektivna preslikava $(\Delta \subseteq \mathbb{R}^3)$

$$\begin{aligned} \Psi & : \quad \Delta \rightarrow D \\ \Psi(\xi, \mu, \eta) & = \quad (x(\xi, \mu, \eta), y(\xi, \mu, \eta), z(\xi, \mu, \eta)). \end{aligned}$$

Naj bo $J\Psi$ Jacobijeva matrika preslikave Ψ , za katero predpostavljamo, da je povsod na Δ nesingularna, $|J\Psi|$ pa naj bo absolutna vrednost determinante Jacobijeve matrike. Potem je

$$\iiint_{\Delta} f(\Psi(\xi, \mu, \eta)) |J\Psi(\xi, \mu, \eta)| \, d\xi \, d\mu \, d\eta = \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

✎ **Cilindrične koordinate.** Naj bo preslikava $\Psi : (r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z)$ dana z $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ in $z = z$, potem je

$$|J\Psi| = r.$$

✎ **Sferične koordinate.** Naj bo preslikava $\Psi : (r, \varphi, \vartheta) \mapsto (x, y, z)$ dana z $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ in $z = r \cos \vartheta$, potem je

$$|J\Psi| = r^2 \sin \vartheta.$$

NALOGE

NALOGA 5.1. T telo omejeno z $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ in $z = 1 - x - y$. Izračunaj

$$\iiint_T (1-x)yz \, dx \, dy \, dz$$

REŠITEV.

$$\iiint_T (1-x)yz \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1-x)yz \, dz = \frac{1}{144}.$$

NALOGA 5.2. Zapiši trikratne integrale kot trojne:

1. $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{2(x^2+y^2)}^{6-(x^2+y^2)} f(x, y, z) \, dz$
2. $\int_{-4}^4 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_{x^2+y^2+1}^{21-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) \, dz$

REŠITEV. 1. $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_{2(x^2+y^2)}^{6-(x^2+y^2)} f(x, y, z) \, dz = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$,
kjer je

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D, 2(x^2 + y^2) \leq z \leq 6 - (x^2 + y^2)\},$$

kjer je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 1] \, x \leq y \leq 1\}$.

2. $\int_{-4}^4 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_{x^2+y^2+1}^{21-\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) \, dz = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, kjer je V območje nad krogom s središčem v $(0, 0)$ in radijem 4, ki leži med ploskvama določenima z grafi funkcij $x^2 + y^2 + 1$ in $21 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

NALOGA 5.3. Volumen valja $x^2 + y^2 = a^2$, omejenega s hiperboloidom $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$.

REŠITEV. V cilindričnih koordinatah dobimo

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \, dr \int_{-\sqrt{a^2+r^2}}^{\sqrt{a^2+r^2}} dz = 4\pi \int_0^a r \sqrt{a^2 + r^2} \, dr = \frac{4\pi a^3 (2\sqrt{2} - 1)}{3}.$$

NALOGA 5.4. Volumen presečišča valjev $x^2 + y^2 = R^2$ in $x^2 + z^2 = R^2$.

REŠITEV.

$$V = \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz = \frac{16R^3}{3}.$$

NALOGA 5.5. Prostornina telesa omejenega z $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8x$.

REŠITEV. Uporabimo sferične koordinate in dobimo

$$r = 2 \sqrt[3]{\sin \vartheta \cos \varphi},$$

kjer $\vartheta \in [0, \pi]$ in $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Volumen znaša

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\sqrt[3]{\sin\vartheta \cos\varphi}} r^2 \sin\vartheta dr = \frac{8\pi}{3}.$$

NALOGA 5.6. Izračunaj integral

$$\iiint_D \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) dx dy dz$$

kjer je D območje v I . oktantu za katerega velja $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1$.

Namig: Uporabi nove spremenljivke $x = au^2$, $y = bv^2$ in $z = cw^2$, kjer so u, v, w iz dela enotske krogle v prvem okrantu.

REŠITEV. Determinanta jacobijeve matrike je $8abcuvw$ in dobimo

$$\iiint_D \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) dx dy dz = 8abc \iiint_B uvw \ln(u^2 + v^2 + w^2) du dv dw = \star,$$

kjer je B del enotske krogle v prvem oktantu. Sedaj uporabimo sferične koordinate in dobimo

$$\star = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^1 r^5 \ln(r^2) \sin^3\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi \cos\varphi dr = -\frac{abc}{18}.$$

NALOGA 5.7. Vztrajnostni moment J_z stožca višine h in spodnjega polmera a .

REŠITEV. Uporabimo cilindrične koordinate in dobimo

$$J_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr \int_0^{H(1-\frac{r}{a})} r r^2 dz = \frac{\pi a^4 H}{10}.$$

NALOGA 5.8. Vztrajnostni moment J_z krogle polmera R .

REŠITEV. Uporabimo sferične koordinate in dobimo

$$J_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^R r^2 \sin\vartheta r^2 \sin^2\vartheta dr = \frac{8\pi R^5}{15}.$$

NALOGA 5.9. Volumen znotraj $(x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2)^2 = x^2/a^2 + y^2/b^2$.

REŠITEV. Uporabimo eliptično-sferične koordinate

$$x = ar \sin\vartheta \cos\varphi \quad y = br \sin\vartheta \sin\varphi \quad z = cr \cos\vartheta$$

in dobimo pogoj

$$r = \sin\vartheta,$$

determinanta Jacobijeve matrike pa je $abcr^2 \sin\vartheta$.

Volumen je

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\sin\vartheta} abcr^2 \sin\vartheta dr = \frac{2\pi}{3} abc \int_0^{\pi} \sin^4\vartheta d\vartheta = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

NALOGA 5.10. Volumen znotraj $(x^2/a^2 + y^2/b^2)^2 + z^2/c^4 = 1$.

REŠITEV. Uporabimo eliptično-cilindrične koordinate

$$x = ar \cos \varphi \quad y = br \sin \varphi \quad z = z$$

in dobimo pogoje

$$z = \pm c^2 \sqrt{1 - r^4},$$

determinanta Jacobijeve matrike pa je abr .

Volumen je

$$2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{c^2 \sqrt{1-r^4}} abrdz = \frac{\pi^2}{2} abc^2.$$

NALOGA 5.11. Izračunaj volumen torusa s polmeroma a, b ($a > b$).

REŠITEV. Uporabimo toroidne koordinate

$$x = (a + r \cos \varphi) \cos \lambda \quad y = (a + r \cos \varphi) \sin \lambda \quad z = r \sin \varphi$$

kjer $\lambda, \varphi \in [0, 2\pi]$ in $r \in [0, b]$, Jacobijeva determinanta je $r(a + r \cos \varphi)$.

Dobimo

$$V = \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b r(a + r \cos \varphi) dr = 2\pi^2 ab^2.$$

NALOGA 5.12. Izračunaj maso valja polmera R in višine H , katerega gostota je enaka kvadratu oddaljenosti točke od $(0, 0, 0)$.

REŠITEV. Računamo

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \star$$

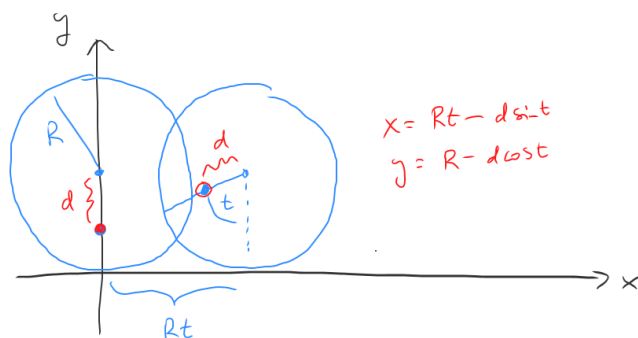
uporabimo cilindrične koordinate in dobimo

$$\star = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r dr \int_0^H (r^2 + z^2) dz = 2\pi \left(\frac{R^4 H}{4} + \frac{R^2 H^3}{6} \right).$$

Domače naloge

NALOGA 6.1. Parametriziraj pot, ki jo opiše točka na razdalji d od središča kroga radija R , ko se le ta brez zdrsavanja kotli po premici.

REŠITEV.

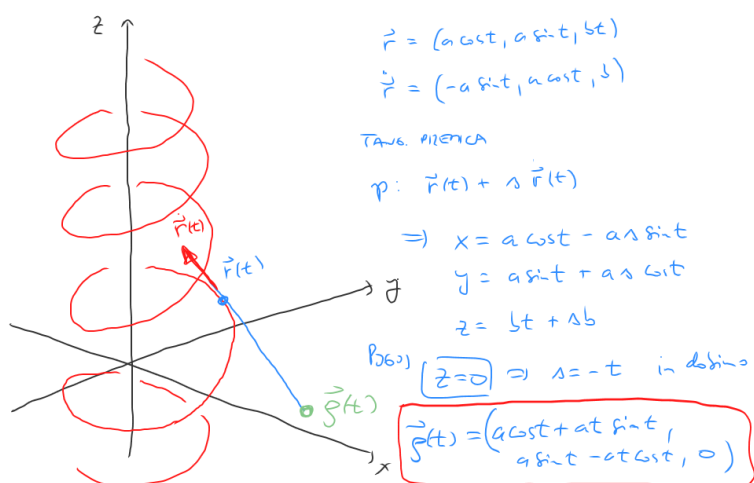


NALOGA 6.2. Dana naj bo spirala S ($a, b > 0$) s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Parametriziraj krivuljo, ki jo opiše presečišče tangentne premice na S skozi točko $\vec{r}(t)$ z xy -ravnino.

REŠITEV.



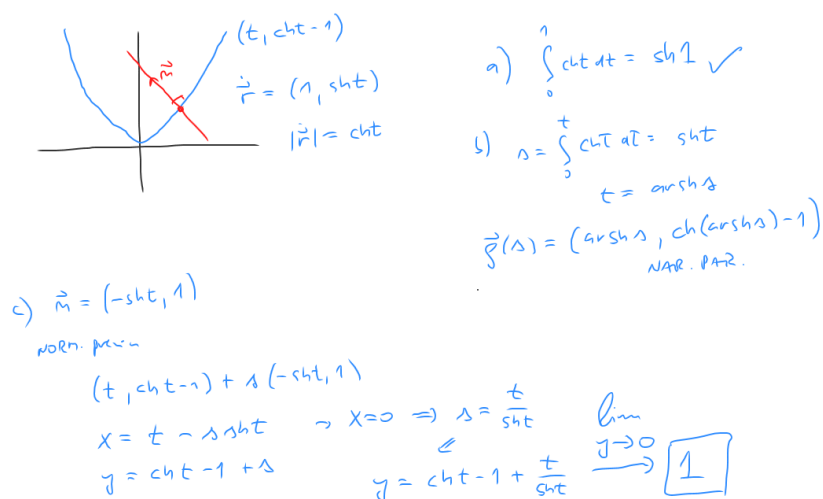
NALOGA 6.3. Dana je krivulja K s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (t, \cosh t - 1) \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Izračunaj dolžino dela krivulje K za $t \in [0, 1]$.
- Krivuljo K naravno parametriziraj.
- Naj bo $y_0(t)$ točka na y -osi, kjer normala na krivuljo K skozi točko $\vec{r}(t)$ seka y -os. Izračunaj

$$\lim_{t \rightarrow 0} y_0(t).$$

REŠITEV.

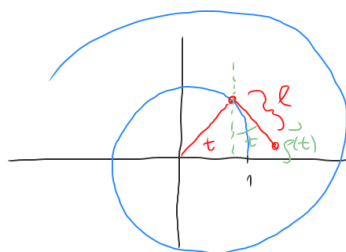


NALOGA 6.4. Dana je spirala v ravnini s parametrizacijo

$$\vec{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad t \in [0, \infty).$$

Parametriziraj pot, ki jo opiše konec niti z začetkom v točki $(1, 0)$, ko se le ta (t.j. nit) odvijaja z dane spirale.

REŠITEV.



$$\begin{aligned}\vec{r} &= (e^t \cos t, e^t \sin t) \quad t \in [1, \infty) \\ \dot{\vec{r}} &= (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t) \\ |\dot{\vec{r}}| &= \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2} e^t \\ l &= \int_0^t \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} (e^t - 1)\end{aligned}$$

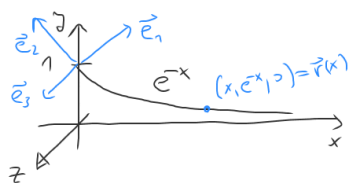
$$\vec{\rho}(t) = \left(e^t \cos t + \sqrt{2} (e^t - 1) \sin t, e^t \sin t - \sqrt{2} (e^t - 1) \cos t \right) \\ t \in [0, \infty)$$

NALOGA 6.5. Dana naj bo funkcija

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x}.$$

- Parametriziraj ploskev, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okoli x -osi.
- Parametriziraj ploskev, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okoli y -osi.
- Parametriziraj ploskev, ki jo dobimo, če graf funkcije f zavrtimo okoli premice $y = x + 1$.

REŠITEV.



$$a) \vec{r}(x, \varphi) = (x, e^{-x} \cos \varphi, e^{-x} \sin \varphi)$$

$$b) \vec{r}(x, \varphi) = (e^{-x} \cos \varphi, e^{-x} \sin \varphi, e^{-x})$$

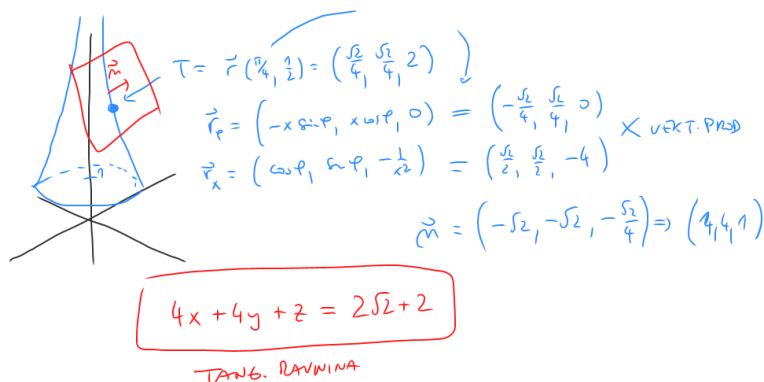
$$\begin{aligned}c) \quad \vec{e}_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \vec{e}_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 1)\end{aligned} \quad \vec{S}(x, \varphi) = (\vec{r} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{r} \cdot \vec{e}_2) \cos \varphi \vec{e}_2 + (\vec{r} \cdot \vec{e}_2) \sin \varphi \vec{e}_3.$$

NALOGA 6.6. Dana je ploskev S s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, x) = (x \cos \varphi, x \sin \varphi, \frac{1}{x}) \quad \varphi \in [0, 2\pi], x \in (0, 1].$$

Določi enačbo tangentne ravnine na ploskev S v točki $\vec{r}(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$.

REŠITEV.

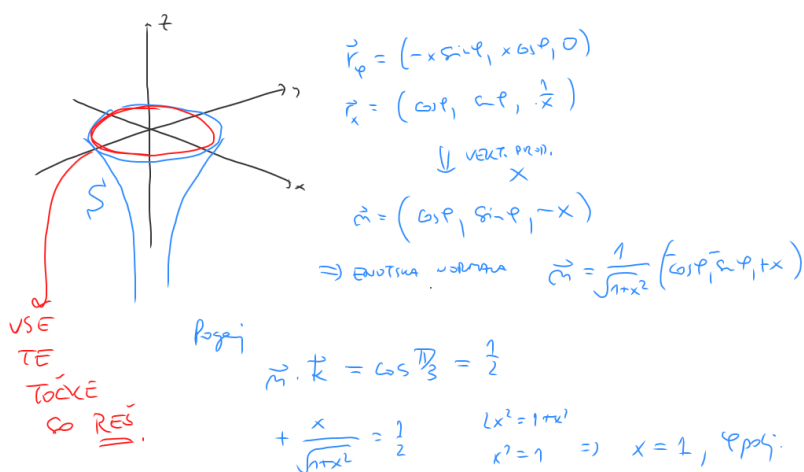


NALOGA 6.7. Dana je ploskev S s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, x) = (x \cos \varphi, x \sin \varphi, \ln x) \quad \varphi \in [0, 2\pi], x \in (0, 1].$$

Določi vse točke na ploskvi S , katerih tangentna ravnina seka xy -ravnino pod kotom $\frac{\pi}{3}$.

REŠITEV.

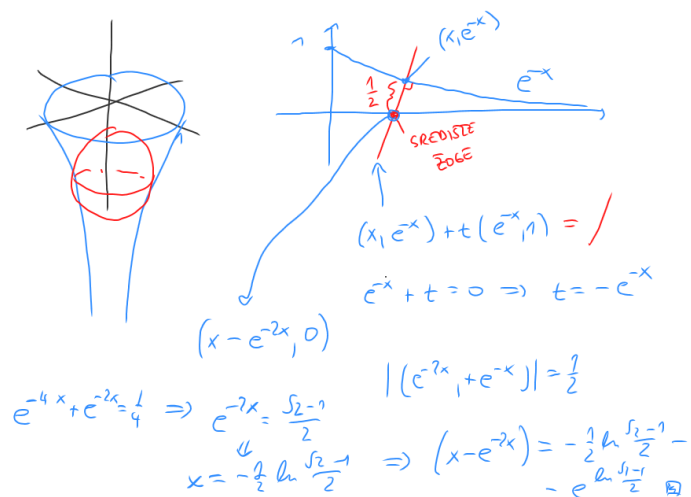


NALOGA 6.8. Dana je ploskev S v obliki lijaka s parametrizacijo

$$\vec{r}(\varphi, z) = (e^z \cos \varphi, e^z \sin \varphi, z) \quad \varphi \in [0, 2\pi], z \in (-\infty, 0].$$

V lijak vržemo žogo premera 1. Določi z -koordinato središča žoge, ko se ta ustavi v lijaku.

REŠITEV.



NALOGA 6.9. Naj bo $I(x) = \int_x^{x^2} e^{-xt^2} dt$. Izračunaj $I'(x)$!

REŠITEV.

$$I = \int_x^{x^2} e^{-xt^2} dt$$

$$I' = e^{-x^5} - e^{-x^3} + \int_x^{x^2} t^2 e^{-xt^2} dt = \dots$$

NALOGA 6.10. Ali konvergirata enakomerno dana integrala:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-mx}}{1+x^2} \quad \text{za } m \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2} \quad \text{za } m \in (-\infty, \infty)$$

REŠITEV.

$$\begin{array}{lcl}
 \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx}}{1+x^2} dx & \left| \frac{e^{-mx}}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} & m \in [0, \infty) \\
 \Downarrow & & \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \text{ konv.} \\
 \text{Konv. enakom.} & & \\
 \text{na } [0, \infty) & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx & \left| \frac{\cos mx}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2} & m \in \mathbb{R} \\
 \Downarrow & & \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \text{ konv.} \\
 \text{Konv. ENAK.} & & \\
 \text{na } \mathbb{R} & &
 \end{array}$$

NALOGA 6.11. Ali konvergira enakomerno za $y \in [1, \infty]$ integral

$$F(y) = \int_0^{\infty} y e^{-xy} dx ?$$

Kaj pa za $y \in (0, 1)$?

REŠITEV.

$$\begin{array}{lcl}
 F(y) = \int_0^{\infty} y e^{-xy} dx & & \\
 \text{Naj bo } y \in [1, \infty) & \left| \int_0^{\infty} y e^{-xy} dx \right| = e^{-ny} \leq e^{-n} < \epsilon & y \in [1, \infty) \\
 \text{in } \epsilon > 0 \text{ polj.} & \text{za} & n > -\ln \epsilon \\
 & & \Rightarrow \text{Konv. enakom. na } [1, \infty)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Naj bo } y \in (0, 1) & & \\
 \text{Naj bo } y < 1 & \left| \int_0^{\infty} y e^{-xy} dx \right| = e^{-ny} \xrightarrow{\lim_{y \rightarrow 0}} 1 & \Rightarrow \text{NI MAJHNO} \\
 & & \text{za vse } y \in (0, 1) \\
 & & (\text{NEBLEDI NA TO KAKO VELIK JE } n)
 \end{array}$$

NALOGA 6.12. Dan je integral s parametrom

$$J(y) = \int_1^{\infty} \frac{y^x}{xy^x + x^2} dx.$$

Za katere $y \geq 0$ integral konvergira in pokaži, da konvergira enakomerno na intervalu $[0, 1]$. Ali lahko izračunamo $J'(a)$ s pomočjo metode odvajanja pod integralom?

NALOGA 6.13. Dan je integral s parametrom

$$J(y) = \int_1^{\infty} \frac{\log x (2y)^x}{x} dx.$$

Za katere $y \geq 0$ integral konvergira in pokaži, da konvergira enakomerno na vsakem intervalu $[0, c] \subset [0, \frac{1}{2})$. Ali lahko izračunamo $J'(a)$ s pomočjo metode odvajanja pod integralom?

NALOGA 6.14. Izračunaj $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

NALOGA 6.15. Dana naj bo funkcija

$$I(m) = \int_0^1 \frac{mf(x)}{m^2 + x^2} dx,$$

kjer je f zvezna na $[0, 1]$. Ali je I zvezna na $\mathbb{R}$?

NALOGA 6.16. Za katere $p \in \mathbb{R}$ konvergira integral

$$I(p) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^p x dx.$$

Izračunaj I .

NALOGA 6.17. Za katere $p, q \in \mathbb{R}$ konvergira integral

$$I(p, q) = \int_1^{\infty} (x^r - 1)^p x^{-q} dx \quad r > 0.$$

Izrazi I s pomočjo Beta funkcije.

NALOGA 6.18. Izračunaj dvojni integral

$$\iint_D |x^2 - y| dx dy,$$

kjer je

$$D = [0, 2] \times [1, 3] \subset \mathbb{R}^2.$$