

Analiza 1: 3. kolokvij

19. 4. 2018

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- N Naj bosta $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Potem velja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- N Naj bo $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$, za katero je $F(1) = -1$. Potem je $F(-1) = 1$.
- N Vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je odvedljiva na $(-1, 1)$, je zvezna na $[-1, 1]$.
- N Če za odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(x) \leq f(1)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je $f'(1) = 0$.
- N Če je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in omejena, je f enakomerno zvezna na \mathbb{R} .
- N Predpis $\vec{r}(t) = (\sin t, 2 + \cos t)$ določa parametrizacijo krožnice v \mathbb{R}^2 .
- N Vsaka zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivno funkcijo.
- N Če je odvedljiva funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ omejena, ima vsaj eno stacionarno točko.
- N Če graf odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seka premico $y = 1$ v dveh različnih točkah, ima f stacionarno točko.
- N Če je odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo naraščajoča, je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

2. naloga (20 točk)

Ravninska krivulja K je podana v parametrični obliki s predpisom:

$$\begin{aligned}x(t) &= te^{-2t^2}, \\ y(t) &= \frac{t}{1+t^2}\end{aligned}$$

za $t \in \mathbb{R}$.

- (a) S pomočjo odvoda skiciraj grafa funkcij x in y .
- (b) Skiciraj krivuljo K . Še posebej natančno opiši njeno obnašanje v okolici točke $(0, 0)$.

3. naloga (20 točk)

Izračunaj nedoločena integrala:

- (a) $\int \frac{7x+6}{x^3-2x-4} dx,$
- (b) $\int x \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) dx.$

4. naloga (20 točk)

V ravnini \mathbb{R}^2 sta dani krožnica z enačbo $x^2 + y^2 = 1$ in premica z enačbo $x = 2$. Izmed vseh pravokotnikov, ki imajo dve oglišči na krožnici, dve pa na premici, poišči tistega z največjo ploščino.

5. naloga (20 točk)

- (a) Naj bo zvezna funkcija $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva na intervalu $(0, 2)$. Denimo, da velja $f(0) = f(2) = 0$ in $f(1) = 2$. Pokaži, da obstaja taka točka $c \in (0, 2)$, da je $f'(c) = 1$.
- (b) Poišči odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $f'(x) = |x|$. Poišči tudi funkcijo, ki je dvakrat odvedljiva, ni pa dvakrat zvezno odvedljiva. V obeh primerih natančno utemelji, zakaj dani funkciji ustrezata zahtevam.