

Analiza 1: 2. kolokvij

5. 2. 2018

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadraterk čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadraterk prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Na $(0, 1)$ je vsaka strogo naraščajoča funkcija injektivna.



Obstaja tak $s > 0$, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ konvergentna in ni absolutno konvergentna.



Funkcija f , definirana na okolici točke a , je v a zvezna, če je $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$.



Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n > 0$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.



Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna natanko tedaj, ko je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.



Če za funkcijo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$ in $f(0) = 0$, je zvezna v točki $x = 0$.



Če je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, obstaja $x \neq 0$, za katerega velja: $|x| < \frac{1}{2018}$ in $f(x) > 2018$.



Če je funkcija $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ nezvezna le v končno mnogo točkah, je omejena.



Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ je konvergentna.



Funkciji $\ln |x|$ in $\arcsin(|x - 1|)$ imata enako definicijsko območje.

2. naloga (20 točk)

(a) Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!!}.$$

(b) Za $x > 0$ obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x^{2018} + n}{x + n} \right)^{n^2}.$$

3. naloga (20 točk)

Podana je množica točk

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(y-1) = x^2\}.$$

(a) Nariši množico G .

(b) Dokaži, da obstaja neskončno mnogo injektivnih funkcij, ki so definirane za vsa realna števila, njihov graf pa je vsebovan v množici G . Določi tudi število naraščajočih funkcij s temi lastnostmi.

(c) Zapiši predpis za eno izmed naraščajočih funkcij iz (b) ter določi njen levi inverz.

4. naloga (20 točk)

(a) Podana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Določi točke $a \in \mathbb{R}$, v katerih je f zvezna oz. nezvezna. Svoje trditve tudi dokaži.

(b) Določi $a \in \mathbb{R}$, da bo za $f(x) = \frac{ax^2 + \sin^2 x}{x^2 + 1 - \cos x}$ veljalo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

5. naloga (20 točk)

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pogojno konvergentna vrsta.

(a) Pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ni absolutno konvergentna.

(b) Pokaži, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolutno konvergentna. S protiprimerom pokaži, da vrsta

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ ni nujno absolutno konvergentna.