

Analiza 1: 4. kolokvij

11. 6. 2018

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Za poljubno zaporedje zvezno odvedljivih funkcij $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ki na (a, b) enakomerno konvergira k odvedljivi funkciji f , tudi zaporedje f'_n konvergira k f' .



Obstaja potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, ki konvergira le za $x = a$.



Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ divergira za vsak $\alpha > 0$.



V vsakem neskončnem metričnem prostoru obstaja tudi neomejena podmnožica.



Taylorjev polinom 3. stopnje pri razvoju funkcije $\tan x$ okoli $x = 0$ je enak $x + \frac{x^3}{3}$.



Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{j}{n}$ je enaka $\sin 1$.



Preslikava $f: (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, $f(x, y) = (y, x)$, je zvezna v izhodišču.



Za poljubno zvezno funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ podana naraščajoča funkcija.



Naj bo $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$ metrika in $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ strogo naraščajoča funkcija. Če je $f(0) = 0$, je tudi $f \circ d$ metrika na M .



Množica $(0, 1) \times \{0\}$ je odprta v (\mathbb{R}^2, d_2) .

2. naloga (20 točk)

- (a) Cikloida je parametrizirana s predpisom $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ za $t \in [0, 2\pi]$. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če jo zavrtimo okoli x -osi.
- (b) Ugotovi, za katera naravna števila m in n konvergira integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x^n \sqrt{1 - x^m}} dx.$$

3. naloga (20 točk)

Podana sta funkcijsko zaporedje $f_n(x) = \sin^n x$ in vrsta $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

- (a) Poišči limitno funkcijo za funkcijsko zaporedje f_n na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ali je konvergenca enakomerna?
- (b) Dokaži, da je funkcijska vrsta g enakomerno konvergentna na intervalih oblike $[0, a)$, $a < \frac{\pi}{2}$, ne pa tudi na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$.

4. naloga (20 točk)

- (a) Z uporabo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{1-x} - \sin x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{18}x^3}{x^2 e^{-x^2} - x^2}.$$

- (b) Izračunaj konvergenčno območje in vsoto potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n+1}.$$

5. naloga (20 točk)

Naj bo $A \subset \mathbb{N}$ neprazna in končna, $M = \mathcal{P}(A)$ njena potenčna množica in $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ preslikava podana s predpisom

$$d(B, C) = \text{moč}((B \cup C) \setminus (B \cap C)).$$

- (a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.
- (b) Za $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$ opiši odprto kroglo $K(\{a\}, n)$. Kdaj taka krogla sovpada z M ?
- (c) Naj bo preslikava $F: (M, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_2)$ podana s predpisom $F(B) = \max B$. V katerih točkah $B \in M$ je taka preslikava zvezna?