

Analiza 1

1. kolokvij

13. 12. 2017

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Za poljubno kompleksno število z je število $z + \bar{z} + z\bar{z}$ nenegativno realno število.



Obstaja konvergentno podzaporedje zaporedja $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$.



Vsota dveh iracionalnih števil je vedno iracionalno število.



Obstajata neničelni kompleksni števili z in w , da je $z^2 + w^2 = 0$.



Množica $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$ določa nek Dedekindov rez.



Če za zaporedje realnih števil (a_n) velja $|a_n| < \frac{1}{2^n}$, je zaporedje (a_n) konvergentno.



Vsako konvergentno zaporedje realnih števil je monotono in omejeno.



Množici $[0, 1]$ in $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ sta ekvipolentni.



Vsaka neskončna podmnožica množice racionalnih števil je števno neskončna.



Zaporedje realnih števil s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ je Cauchyjevo.

2. naloga (20 točk)

- (a) Pokaži, da za vsako naravno število n velja neenakost

$$n! > \frac{n^n}{e^n}.$$

- (b) Poišči vsa naravna števila n , za katera je število

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+5}$$

racionalno.

3. naloga (20 točk)

Dani sta množici:

$$M = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z^2) = 0\},$$
$$M' = \{z \in \mathbb{C}; -iz^4 \in M\}.$$

- (a) Skiciraj množici M in M' .
- (b) Pokaži, da je M ekvipolentna \mathbb{R} tako, da konstruiraš injektivni preslikavi $i : M \rightarrow \mathbb{R}$ in $j : \mathbb{R} \rightarrow M$.

4. naloga (20 točk)

Podano je rekurzivno zaporedje

$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}, \quad a_1 = 1.$$

- (a) Grafično ponazori njegovo obnašanje.
- (b) Dokaži, da je zaporedje konvergentno in določi njegovo limito.

Nasvet: Zaporedje razbij na dve monotoni, rekurzivno podani podzaporedji.

5. naloga (20 točk)

- (a) Pokaži, da je zaporedje realnih števil (a_n) s splošnim členom

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}$$

omejeno.

- (b) Pokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.