

Analiza 1: 4. kolokvij

11. 6. 2018

1. naloga (20 točk)

N Za poljubno zaporedje zvezno odvedljivih funkcij $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ki na (a, b) enakomerno konvergira k odvedljivi funkciji f , tudi f'_n konvergira k f' .

P Obstaja potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, ki konvergira le za $x = a$.

N Integral $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ divergira za vsak $\alpha > 0$.

N V vsakem neskončnem metričnem prostoru obstaja tudi neomejena podmnožica.

P Taylorjev polinom 3. stopnje pri razvoju funkcije $\tan x$ okoli $x = 0$ je enak $x + \frac{x^3}{3}$.

P Limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{j}{n}$ je enaka $\sin 1$.

P Preslikava $f: (\mathbb{R}^2, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, $f(x, y) = (y, x)$, je zvezna v izhodišču.

N Za poljubno zvezno funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ podana naraščajoča funkcija.

N Naj bo $d: M \times M \rightarrow [0, \infty)$ metrika in $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ strogo naraščajoča funkcija. Če je $f(0) = 0$, je tudi $f \circ d$ metrika na M .

N Množica $(0, 1) \times \{0\}$ je odprta v (\mathbb{R}^2, d_2) .

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (20 točk)

- (a) Cikloida je parametrizirana s predpisom $\vec{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ za $t \in [0, 2\pi]$. Izračunaj volumen vrtenine, ki jo dobimo, če jo zavrtimo okoli x -osi.
- (b) Ugotovi, za katera naravna števila m in n konvergira integral

$$\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x^n \sqrt{1 - x^m}} dx.$$

Rešitev: Volumen vrtenine v točki (a) je enak

$$V = \pi \int_0^{2\pi} y^2(t) \dot{x}(t) dt = \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = 5\pi^2.$$

Integral iz točke (b) ima singularnosti v obeh krajiščih. Če zapišemo

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x^n \sqrt{1 - x^m}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{x^n \sqrt{1+x+\dots+x^{m-1}}}}{(1-x)^{1/2}},$$

opazimo, da je v $x = 1$ pol stopnje $\alpha = 1/2$. Posledično v tem krajišču nimamo težav s kovergenco. Nasprotno velja

$$\frac{e^x - e^{-x}}{x^n \sqrt{1 - x^m}} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{x \sqrt{1 - x^m}}}{x^{n-1}}.$$

Števec tako zapisanega ulomka konvergira k 2, ko gre $x \rightarrow 0$. Zato integral obstaja natanko tedaj, ko je $n - 1 < 1$ oz. ko je $n = 1$.

Točkovnik:

- +4 Pravilno nastavljen integral v (a).
- +6 Izračun volumna.
- +2 Določitev singularnosti v (b).
- +8 Obravnava konvergence pri $x = 0$ in $x = 1$.

3. naloga (20 točk)

Podana sta funkcijsko zaporedje $f_n(x) = \sin^n x$ in vrsta $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

- (a) Poišči limitno funkcijo za funkcijsko zaporedje f_n na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ali je konvergenca enakomerna?
- (b) Dokaži, da je funkcijska vrsta g enakomerno konvergentna na intervalih oblike $[0, a)$, $a < \frac{\pi}{2}$, ne pa tudi na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Rešitev: Limitna funkcija zaporedja f_n na $[0, \frac{\pi}{2}]$ je enaka

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Ker gre za zaporedje zveznih funkcij in nezvezno limito, konvergenca ni enakomerna.

V točki (b) uporabimo Weierstrassov kriterij oz. oceno

$$\sin^n x \leq \sin^n a, \quad x \in [0, a).$$

Ker je $\sin a < 1$, je geometrijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n a$ konvergentna, kar potrjuje absolutno in enakomerno konvergenco na $[0, a)$, ne pa tudi na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$. Res, ker velja

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x = \frac{\sin x}{1 - \sin x},$$

opazimo, da je funkcija g na okolici točke $x = 1$ neomejena, kljub temu, da so vse njene delne vsote končne. To pomeni, da konvergenca na tem intervalu ne more biti enakomerna.

Točkovnik:

- +5 Določitev limitne funkcije zaporedja.
- +5 Obrazložitev enakomerne konvergence zaporedja.
- +5 Obrazložitev enakomerne konvergence na $[0, a)$.
- +5 Obrazložitev ne-enakomerne konvergence na $[0, \frac{\pi}{2})$.

4. naloga (20 točk)

(a) Z uporabo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{1-x} - \sin x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{18}x^3}{x^2 e^{-x^2} - x^2}.$$

(b) Izračunaj konvergenčno območje in vsoto potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{2n+1}.$$

Rešitev: V točki (a) uporabimo naslednje razvoje

$$x \sqrt[3]{1-x} = x \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} - \frac{5x^3}{81} + O(x^4) \right),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$

$$x^2 e^{-x^2} - x^2 = x^2 (1 - x^2 + O(x^4)) - x^2.$$

Ko jih vstavimo v limito, dobimo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt[3]{1-x} - \sin x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{18}x^3}{x^2 e^{-x^2} - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{5x^4}{81} + O(x^5)}{-x^4 + O(x^5)} = \frac{5}{81}.$$

Za določitev konvergenčnega območja najprej uporabimo korenski kriterij

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{2n+2}}{\frac{2n+3}{2n+1} |x|^{2n}} = |x|^2 < 1.$$

Nadalje opazimo, da za $x = \pm 1$ dobimo konvergentno alternirajočo vrsto. Posledično je območje konvergence zaprti interval $[-1, 1]$.

Za izračun vsote je ključna opazka

$$(xf(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Posledično je

$$f(x) = \frac{1}{x} \int \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\arctan x + C}{x},$$

pri čemer s primerjavo vrste in integrala ugotovimo, da je $C = 0$.

Točkovnik:

+7 Zapis treh ustreznih razvojev.

+3 Izračun limite.

+5 Določitev konvergenčnega območja.

+5 Določitev vsote funkcijske vrste.

5. naloga (20 točk)

Naj bo $A \subset \mathbb{N}$ neprazna in končna, $M = \mathcal{P}(A)$ njena potenčna množica in $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ preslikava podana s predpisom

$$d(B, C) = \text{moč}((B \cup C) \setminus (B \cap C)).$$

- (a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.
- (b) Za $a \in A$ in $n \in \mathbb{N}$ opiši odprto kroglo $K(\{a\}, n)$. Kdaj taka krogla sovpada z M ?
- (c) Naj bo preslikava $F: (M, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_2)$ podana s predpisom $F(B) = \max B$. V katerih točkah $B \in M$ je taka preslikava zvezna?

Rešitev: V točki (a) je potrebno preveriti ključne lastnosti metrike, pri čemer sta pozitivnost in simetričnost očitni. Nadalje velja, da je

$$d(B, C) = 0 \Leftrightarrow B \cup C = B \cap C \Leftrightarrow B = C.$$

Nazadnje dokažemo še trikotniško neenakost, ki sledi iz dejstva, da je

$$\begin{aligned}(B \cup D) \setminus (B \cap D) &= (B \setminus D) \cup (D \setminus B) = \\ &= ((B \setminus D) \cap C) \cup ((B \setminus D) \setminus C) \cup ((D \setminus B) \cap C) \cup ((D \setminus B) \setminus C) \subseteq \\ &\subseteq (C \setminus D) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus B) \cup (D \setminus B) = ((B \cup C) \setminus (B \cap C)) \cup ((C \cup D) \setminus (C \cap D)).\end{aligned}$$

Alternativa zgornjemu razmisleku je tudi uporaba Venovega diagrama.

V točki (b) ločimo dva primera. Za $a \in B$ je $B \in K(\{a\}, n)$ natanko tedaj, ko je

$$\text{moč}(B \setminus \{a\}) = \text{moč}(B) - 1 \leq n - 1.$$

To pomeni, da lahko B skupaj z a vsebuje n elementov. Nasprotno v primeru, ko $a \notin B$ velja, da je $B \in K(\{a\}, n)$ natanko tedaj, ko je

$$\text{moč}(B \cup \{a\}) = \text{moč}(B) + 1 \leq n - 1.$$

To pomeni, da lahko B vsebuje največ $n - 2$ elementov. Iz zgornjega razmisleka je jasno tudi, da je od množice $\{a\}$ najbolj oddaljen njen komplement $A \setminus \{a\}$, razdalja pa je v tem primeru enaka $\text{moč}(A)$. Odprta krogla $K(\{a\}, n)$ torej vsebuje cel prostor M , če je $n > \text{moč}(A)$.

Nazadnje obravnavajmo še zveznost. Ker razdalja d zavzame zgolj celoštevilске vrednosti, za vsako $B \in M$ in vsak $0 < \delta < 1$ velja

$$K(B, \delta) = \{B\}.$$

To pomeni, da lahko za poljuben $\epsilon > 0$ izberemo npr. $\delta = 1/2$, saj veljajo sklepi

$$C \in K(B, \delta) \Rightarrow B = C \Rightarrow |F(B) - F(C)| = |\max(B) - \max(C)| = 0 < \epsilon.$$

Posledično je F zvezna v vseh točkah M razen v prazni množici \emptyset , kjer ni definirana.

Točkovnik:

+9 Preverjanje lastnosti metrike.

+6 Obravnava odprtih krogel.

+5 Obravnava zveznosti.