

Analiza 1: 3. izpit

4. 9. 2018

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x^2}$, nima globalnega minimuma.



Integral $\int_0^\infty \frac{1}{x^{1+m}} dx$ je divergenten za vsak $m > 0$.



Funkcija $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ je v točki $x = 0$ zvezna, ne pa tudi odvedljiva.



Predpis $d(f, g) = \min_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ podaja metriko prostora zveznih funkcij $\mathcal{C}([0, 1])$.



Če funkcijo $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ razvijemo okoli točke $x = 0$, se Taylorjeva polinoma tretje in četrte stopnje ujemata.



Za vsako omejeno zaporedje a_n velja, da je $\limsup a_n \leq \sup a_n$.



Funkcijsko zaporedje $f_n(x) = x^n$ konvergira enakomerno na intervalu $[0, 1]$.



Če za odvedljivo funkcijo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(0) = 0$ in $f(2) = 1$, zagotovo obstaja tudi premica, ki je tangenta na njen graf in ima smerni koeficient enak $\frac{1}{2}$.



Zaporedje z enim samim stekališčem je vedno konvergentno.



Množica kompleksnih števil je ekvipolentna množici realnih števil.

2. naloga (20 točk)

Za $a > 0$ sta podani funkciji

$$x(t) = a(1 + \cos t) \cos t, \quad y(t) = \frac{a}{2} \sin 2t.$$

- a) Poišči ničle in stacionarne točke funkcije $x(t)$ na intervalu $t \in [0, 2\pi]$ ter natančno nariši njen graf. Skiciraj tudi graf funkcije $y(t)$ nad istim intervalom.
- b) Skiciraj parametrično krivuljo $(x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, ter označi njeno orientacijo. Izračunaj skupno ploščino likov, ki jih oklepajo njene zanke.

3. naloga (20 točk)

- a) Izračunaj limito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2} - 1}.$$

- b) Naj bo $c > 1$. Dokaži, da je rekurzivno zaporedje

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{c(1+a_n)}{c+a_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

konvergentno in da zanj velja $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{c}$.

4. naloga (20 točk)

Dana je funkcijska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} \sin nx$.

- (a) Pokaži, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$ in da je njena vsota zvezna funkcija na \mathbb{R} , ki jo označimo z f .
- (b) Pokaži, da je

$$\int_0^\pi f(x) dx = \frac{8}{15}.$$

5. naloga (20 točk)

Na množici $M = \{2^k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}, n \text{ liho naravno število}\}$ definiramo funkcijo $v: M \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $v(2^k \cdot n) = 2^{-k}$ in metriko

$$d(x, y) = \begin{cases} v(|x - y|), & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

- (a) Dano je zaporedje števil $a_n = 2^n - 1$ v metričnem prostoru (M, d) . Ugotovi, ali je dano zaporedje Cauchyjevo oziroma konvergentno.
- (b) Ali je preslikava $\text{id}: (M, d_2) \rightarrow (M, d)$, ki je definirana s predpisom $\text{id}(x) = x$, zvezna?
- (c) Ali obstaja odprta kroglja $K(a, r)$ v metričnem prostoru (M, d) , ki vsebuje neskončno mnogo različnih naravnih števil? Svoj odgovor utemelji!