

## Analiza 1: 1. izpit

19. 6. 2018

### 1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!



Naj bo funkcija  $f: (0, 4) \rightarrow \mathbb{R}$  odvedljiva. Če velja enakost  $f(3) = f(2) + 1$ , obstaja točka  $c \in (2, 3)$ , da je  $f'(c) = 1$ .



Enotska krogla prostora  $(\mathcal{C}([0, 1]), d_1)$  je podmnožica enotske krogle v  $(\mathcal{C}([0, 1]), d_\infty)$ .



Definicijsko območje funkcije  $f(x) = \tan(\arctan x)$  je enako njeni zalogi vrednosti.



Obstaja funkcija, ki je odvedljiva v vseh točkah intervala  $(0, 1)$ , ni pa zvezna v  $x = \frac{1}{2}$ .



Funkcija  $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$  ima v točki  $x = 0$  lokalni minimum.



Funkcija je  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna na  $D$  natanko tedaj, ko za vsak  $\epsilon > 0$  obstaja  $\delta > 0$ , da za vsak par  $x, y \in D$  z lastnostjo  $|x - y| < \delta$  velja tudi  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ .



Kvocijent dveh različnih neničelnih iracionalnih števil je vedno iracionalen.



Mnozici  $(0, 1] \times \mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$  sta ekvipolentni.



Zaporedje z enim samim stekališčem je konvergentno.



Vsota vseh kompleksnih rešitev enačbe  $z^5 - z = 0$  je enaka 0.

## 2. naloga (20 točk)

Podana je funkcija

$$f(x) = 1 - 2xe^{-\frac{2}{x}}.$$

- Pokaži, da ima funkcija  $f$  ničlo na intervalu  $[1, 2]$ .
- Določi definicijsko območje, limite na robovih definicijskega območja ter intervale naraščanja in padanja. Nariši graf funkcije  $f$ .

## 3. naloga (20 točk)

- Izračunaj nedoločeni integral  $\int x^5 \arctan(x^2) dx$ .
- Skiciraj krivuljo, ki je v polarnih koordinatah podana z zvezo  $r(\varphi) = |2 + 4 \cos \varphi|$ . Izračunaj ploščino manjše izmed njenih zank.

## 4. naloga (20 točk)

Dano je zaporedje funkcij  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisi  $f_n(x) = xe^{-nx^2}$ .

- Izračunaj limitno funkcijo in ugotovi, ali zaporedje  $f_n$  konvergira enakomerno na  $\mathbb{R}$ .
- Pokaži, da vrsta  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  konvergira za vsak  $x \in \mathbb{R}$  in izračunaj njeno vsoto. Ali vrsta konvergira enakomerno na  $\mathbb{R}$ ?

## 5. naloga (20 točk)

Naj bo  $M$  množica vseh realnih zaporedij  $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  z lastnostjo  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Preslikava  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$  je podana s predpisom

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

- Utemelji, zakaj zgornji supremum vedno obstaja in pokaži, da je  $d$  metrika.
- Naj bo  $A \subset M$  podmnožica vseh zaporedij  $\mathbf{x} \in M$ , za katera velja  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ . Ali je  $A$  odprta oziroma zaprta podmnožica  $M$ ?
- Definirajmo preslikavo  $F : (M, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d_2)$  s predpisom

$$F(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}.$$

Ali je preslikava  $F$  zvezna?