

Analiza 1: 2. izpit

3. 7. 2018

1. naloga (20 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadrateg čitljivo označi, če je trditev pravilna P oziroma napačna N.

Če ne veš, pusti kvadrateg prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

R Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem je funkcija $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, odvedljiva na $(0, 1)$.

R Vsaka alternirajoča vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, za katero je zaporedje $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ monotono padajoče, je konvergentna.

R Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom $f(x) = -2x + \sin(3x)$, je enakomerno zvezna na \mathbb{R} .

R Naj bodo $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaprte podmnožice metričnega prostora (M, d) . Potem je tudi unija $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ zaprta podmnožica (M, d) .

R Naj bo $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zaporedje zveznih funkcij, ki konvergira na $[0, 1]$ enakomerno k funkciji f . Potem je tudi funkcija f zvezna na $[0, 1]$.

R Množica $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ ima natančno spodnjo mejo.

R Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergira na intervalu $(-1, 1)$ enakomerno k vsoti $\frac{1}{1-x}$.

R Če za zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(0) = f(1) = 0$, obstaja točka $c \in (0, 1)$, v kateri je funkcija f odvedljiva in velja $f'(c) = 0$.

R Vsako Cauchyjevo zaporedje kompleksnih števil je konvergentno.

R Definirajmo kompleksno število $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Potem je $|z|^{2018} = 1$.

2. naloga (20 točk)

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & ; x < 0, \\ b & ; x = 0, \\ \frac{(x+c)^2 e^x}{x(e^x-1)} & ; x > 0. \end{cases}$$

- (a) Določi konstante $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna na \mathbb{R} . Ali je tako dobljena funkcija f odvedljiva v točki $x = 0$?
- (b) Definirajmo funkcijo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Pokaži, da je funkcija F injektivna in določi njeno zalogo vrednosti.

3. naloga (20 točk)

- (a) Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo graf funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ okoli abscisne osi na intervalu $x \in [0, 2]$.
- (b) V odvisnosti od realnega parametra $a > 0$ obravnavaj konvergenco integrala

$$\int_1^\infty \frac{x^a \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx.$$

4. naloga (20 točk)

- (a) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki so definirane s predpisi $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$. Pokaži, da funkcijski zaporedji f_n in f_n^2 konvergirata po točkah in ugotovi, ali konvergirata enakomerno na \mathbb{R} .
- (b) Razvij funkcijo $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9x+18}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 2$ in izračunaj $f^{(2018)}(2)$.

5. naloga (20 točk)

Naj bo $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ in $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$d(m, n) = \begin{cases} |1/n - 1/m|, & n \neq \infty, m \neq \infty, \\ 1/n, & n \neq \infty, m = \infty, \\ 1/m, & n = \infty, m \neq \infty, \\ 0, & n = \infty, m = \infty. \end{cases}$$

- (a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.
- (b) Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $r > 0$, da je $K(n, r) = \{n\}$. Pokaži tudi, da za vsak $r > 0$ kroglja $K(\infty, r)$ vsebuje vse razen končno mnogo elementov M . Ali obstaja množica $A \subseteq M$, ki ni niti odprta niti zaprta?
- (c) Ali je preslikava $j : (\mathbb{N}, d_2) \rightarrow (M, d)$, ki je definirana s predpisom $j(n) = n$, zvezna?