

Rešitve 2. izpita iz Analize 1

- (1) **N** Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Potem je funkcija $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, odvedljiva na $(0, 1)$.
- N** Vsaka alternirajoča vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, za katero je zaporedje $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ monotono padajoče, je konvergentna.
- P** Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom $f(x) = -2x + \sin(3x)$, je enakomerno zvezna na \mathbb{R} .
- N** Naj bodo $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaprte podmnožice metričnega prostora (M, d) . Potem je tudi unija $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ zaprta podmnožica (M, d) .
- P** Naj bo $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zaporedje zveznih funkcij, ki konvergira na $[0, 1]$ enakomerno k funkciji f . Potem je tudi funkcija f zvezna na $[0, 1]$.
- P** Množica $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ ima natančno spodnjo mejo.
- N** Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergira na intervalu $(-1, 1)$ enakomerno k vsoti $\frac{1}{1-x}$.
- N** Če za zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(0) = f(1) = 0$, obstaja točka $c \in (0, 1)$, v kateri je funkcija f odvedljiva in velja $f'(c) = 0$.
- P** Vsako Cauchyjevo zaporedje kompleksnih števil je konvergentno.
- P** Definirajmo kompleksno število $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Potem je $|z|^{2018} = 1$.

(2) Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} ae^x & ; x < 0, \\ b & ; x = 0, \\ \frac{(x+c)^2 e^x}{x(e^x-1)} & ; x > 0. \end{cases}$$

- (a) Določi konstante $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija f zvezna na \mathbb{R} . Ali je tako dobljena funkcija f odvedljiva v točki $x = 0$?
- (b) Definirajmo funkcijo $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Pokaži, da je funkcija F injektivna in določi njeno zalogo vrednosti.

Rešitev: (a) Imenovalc izraza $\frac{(x+c)^2 e^x}{x(e^x-1)}$ ima ničlo v točki $x = 0$. Če torej hočemo, da bo obstajala desna limita funkcije f v točki $x = 0$, mora biti $c = 0$. V tem primeru velja

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x(1 + x + \dots)}{(1 + x + \dots) - 1} = 1.$$

Da bo f zvezna v točki $x = 0$, mora nadalje veljati še $b = 0$ in

$$1 = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} ae^x = a.$$

Tako dobimo funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ; x < 0, \\ 1 & ; x = 0, \\ \frac{xe^x}{e^x - 1} & ; x > 0. \end{cases}$$

Funkcija f je po definiciji odvedljiva v $x = 0$, če obstaja limita $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$. Zaradi različnih predpisov bomo morali posebej izračunati levo in desno limito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \uparrow 0} \frac{e^x}{1} = 1, \\ \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{xe^x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}, \\ &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{x(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots) - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots) + 1}{x((1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots) - 1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vidimo, da limiti nista enaki, kar pomeni, da funkcija f ni odvedljiva v točki $x = 0$.

(b) Po osnovnem izreku integralnega računa je funkcija $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ odvedljiva in velja $F'(x) = f(x)$. Ker je funkcija f pozitivna na \mathbb{R} , pa je torej F naraščajoča in zato injektivna.

Zaloga vrednosti bomo določili z izračunom limit:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) &= \int_0^{-\infty} f(t) dt = \int_0^{-\infty} e^t dt = -1, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= \int_0^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{te^t}{e^t - 1} dt = \infty. \end{aligned}$$

Zaloga vrednosti funkcije F je torej interval $(-1, \infty)$. □

- [6] Določitev konstant a , b in c .
- [6] Dokaz, da f ni odvedljiva v $x = 0$.
- [4] Dokaz, da je F injektivna.
- [4] Zaloga vrednosti funkcije F .

- (3) (a) Izračunaj površino vrtenine, ki jo dobimo, če zavrtimo graf funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ okoli abscisne osi na intervalu $x \in [0, 2]$.
 (b) V odvisnosti od realnega parametra $a > 0$ obravnavaj konvergenco integrala

$$\int_1^\infty \frac{x^a \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} dx.$$

Rešitev: (a) Ker je $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$, je površina dane vrtenine enaka

$$P = 2\pi \int_0^2 f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_0^2 \sqrt{x^2 + 4} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + 4}} dx = 2\sqrt{2}\pi \int_0^2 \sqrt{x^2 + 2} dx.$$

Integral na desni lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke ali pa z uporabo algoritma za integracijo korenskih funkcij. Z uporabo slednjega dobimo

$$\int \sqrt{x^2 + 2} dx = \int \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + 2} + \int \frac{C}{\sqrt{x^2 + 2}} dx.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{2Ax^2 + Bx + (2A + C)}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

S primerjavo koeficientov vidimo, da je $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$ in $C = 1$, od koder sledi

$$\int \sqrt{x^2 + 2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 2} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 2} + \ln|x + \sqrt{x^2 + 2}| + C.$$

Površina vrtenine pa je enaka

$$P = 2\sqrt{2}\pi \left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 2} + \ln|x + \sqrt{x^2 + 2}| \right) \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})).$$

(b) Obravnavati moramo konvergenco integrala v okolici točke $x = 1$ in pri $x \rightarrow \infty$.

$x \rightarrow 1$: Integrand lahko zapišemo v obliki

$$\frac{x^a \ln x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}} = \frac{\frac{x^a \ln x}{(x-1)(x+1)^{\frac{3}{2}}}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$$

Imamo torej pol stopnje $s = \frac{1}{2}$ in funkcijo $g(x) = \frac{x^a \ln x}{(x-1)(x+1)^{\frac{3}{2}}}$, za katero lahko preverimo, da ima limito $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2^{-\frac{3}{2}}$. Od tod sklepamo, da integral konvergira v okolici pola $x = 1$ za vsak $a > 0$.

$x \rightarrow \infty$: Ko gre $x \rightarrow \infty$, izraz $\sqrt{(x^2 - 1)^3}$ narašča podobno hitro kot x^3 . Integrand se pri $x \rightarrow \infty$ torej obnaša podobno kot izraz

$$\frac{\ln x}{x^{3-a}}.$$

Če je $3 - a \leq 1$ (oziroma $a \geq 2$), bo torej integral divergiral. Če je $a < 2$, pa lahko najdemo $\epsilon > 0$, da bo $a + \epsilon < 2$. Pišimo sedaj

$$\frac{\ln x}{x^{3-a}} = \frac{x^{a-2+\epsilon} \ln x}{x^{1+\epsilon}}.$$

Potem je $s = 1 + \epsilon > 1$, funkcija $g(x) = x^{a-2+\epsilon} \ln x$ pa bo konvergirala proti 0, ko bo šel $x \rightarrow \infty$. To pomeni, da dani integral konvergira v neskočnosti, če je $a < 2$.

Posplošeni integral torej konvergira za $a \in (0, 2)$. □

- [2] Izpeljava formule $P = 2\sqrt{2}\pi \int_0^2 \sqrt{x^2 + 2} dx$.
- [6] Integracija iracionalne funkcije.
- [2] Rezultat.
- [5] Obravnava konvergence v $x = 1$.
- [5] Obravnava konvergence pri $x \rightarrow \infty$.

- (4) (a) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki so definirane s predpisi $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$. Pokaži, da funkcijski zaporedji f_n in f_n^2 konvergirata po točkah in ugotovi, ali konvergirata enakomerno na \mathbb{R} .
- (b) Razvij funkcijo $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9x+18}$ v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 2$ in izračunaj $f^{(2018)}(2)$.

Rešitev: (a) Za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + \frac{1}{n}) = x,$$

od koder sklepamo, da konvergira zaporedje f_n po točkah proti funkciji $f(x) = x$, zaporedje f_n^2 pa po točkah proti funkciji $F(x) = x^2$.

Pokažimo sedaj, da konvergira zaporedje f_n enakomerno na \mathbb{R} k f . To sledi iz dejstva, da zaporedje

$$c_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x - (x + \frac{1}{n})| = \frac{1}{n}$$

konvergira proti 0.

Po drugi strani pa je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - f_n^2(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^2 - (x + \frac{1}{n})^2| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |-\frac{2x}{n} - \frac{1}{n^2}| = \infty,$$

kar pomeni, da zaporedje f_n^2 ne konvergira enakomerno na \mathbb{R} .

(b) Pišimo

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-9x+18} = \frac{x-2}{(6-x)(3-x)} = \frac{t}{(4-t)(1-t)} = \frac{t}{4(1-\frac{t}{4})(1-t)},$$

kjer smo označili $t = x - 2$. Z uporabo formule za vsoto geometrijske vrste in konvolucijskega produkta dobimo

$$\frac{t}{4(1-\frac{t}{4})(1-t)} = \frac{t}{4} \left(1 + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{16} + \frac{t^3}{4^3} + \dots \right) (1 + t + t^2 + t^3 + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

kjer je $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{4}$ in

$$a_n = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3}.$$

Od tod dobimo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{3} (x-2)^n.$$

Z uporabo formule za Taylorjevo vrsto od tod sledi še

$$f^{(2018)}(2) = 2018! a_{2018} = 2018! \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^{2018}}}{3}.$$

□

- [2] Izračun limitnih funkcij.
- [8] Obravnava enakomerne konvergence.
- [8] Izračun Taylorjeve vrste.
- [2] Izračun odvoda $f^{(2018)}(2)$.

(5) Naj bo $M = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ in $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$d(m, n) = \begin{cases} |1/n - 1/m|, & n \neq \infty, m \neq \infty, \\ 1/n, & n \neq \infty, m = \infty, \\ 1/m, & n = \infty, m \neq \infty, \\ 0, & n = \infty, m = \infty. \end{cases}$$

- (a) Pokaži, da je (M, d) metrični prostor.
 (b) Pokaži, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja $r > 0$, da je $K(n, r) = \{n\}$. Pokaži tudi, da za vsak $r > 0$ kroglja $K(\infty, r)$ vsebuje vse razen končno mnogo elementov M . Ali obstaja množica $A \subseteq M$, ki ni niti odprta niti zaprta?
 (c) Ali je preslikava $j: (\mathbb{N}, d_2) \rightarrow (M, d)$, ki je definirana s predpisom $j(n) = n$, zvezna?

Rešitev: (a) Pozitivna definitnost in simetričnost preslikave d sledita direktno iz predpisa, zato se posvetimo trikotniški neenakosti. Pokazati želimo, da za vsake $x, y, z \in M$ velja $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Privzamemo lahko še, da so x, y in z različne točke. Denimo najprej, da so $x, y, z \in \mathbb{N}$. Potem je

$$d(x, z) = |1/z - 1/x| = |1/z - 1/y + 1/y - 1/x| \leq |1/z - 1/y| + |1/y - 1/x| = d(y, z) + d(x, y).$$

Če je $x = \infty$, dobimo

$$d(x, z) = 1/z = 1/z - 1/y + 1/y \leq |1/z - 1/y| + 1/y = d(y, z) + d(x, y).$$

Podoben račun zaradi simetričnosti deluje tudi v primeru, ko je $z = \infty$. V primeru, ko je $y = \infty$, pa dobimo

$$d(x, z) = |1/z - 1/x| \leq 1/z + 1/x = d(y, z) + d(x, y).$$

- (b) Vzemimo poljuben $n \in \mathbb{N}$. Potem je za poljuben $m \in \mathbb{N}$

$$d(n, m) = |1/n - 1/m|.$$

Ta izraz bo najmanjši pri $m = n + 1$, ko bo enak $d(n, n + 1) = |1/n - 1/(n + 1)|$. Ker velja tudi $d(n, n + 1) < d(n, \infty)$, za $r = d(n, n + 1)$ velja $K(n, r) = \{n\}$.

Za poljuben $r > 0$ so izven $K(\infty, r)$ vsa naravna števila n , za katere je $d(\infty, n) = 1/n \geq r$. To so vsa naravna števila, ki zadoščajo pogoju $n \leq 1/r$, ki pa jih je le končno mnogo.

Naj bo A poljubna podmnožica M . Če A ne vsebuje točke ∞ , je A unija neke podmnožice naravnih števil. Ker smo že pokazali, da je vsako naravno število odprta množica ($K(n, r) = \{n\}$), je v tem primeru tudi A odprta. Če pa je $\infty \in A$, pa je po pravkar dokazanem A^c odprta, kar pa pomeni, da je A zaprta. To pomeni, da je vsaka podmnožica $A \subseteq M$ odprta ali zaprta.

- (c) Spomnimo se s predavanj, da je preslikava $j: (\mathbb{N}, d_2) \rightarrow (M, d)$ zvezna, če je prasluka $j^{-1}(U)$ vsake odprte podmnožice $U \subset M$ odprta v \mathbb{N} . To pa je res, ker je vsaka podmnožica metričnega prostora (\mathbb{N}, d_2) odprta. Torej je j zvezna. \square

- [4] Dokaz, da je d metrika.
- [4] Dokaz obstoja $r > 0$, da je $K(n, r) = \{n\}$.
- [4] Dokaz, da kroglja $K(\infty, r)$ vsebuje vse razen končno mnogo elementov M .
- [4] Dokaz, da je vsaka podmnožica $A \subseteq M$ odprta ali zaprta.
- [4] Dokaz, da je j zvezna.