

Rešitve 1. kolokvija iz Analize 1

- (1) **N** Za poljubno kompleksno število z je število $z + \bar{z} + z\bar{z}$ nenegativno realno število.
- P** Obstaja konvergentno podzaporedje zaporedja $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$.
- N** Vsota dveh iracionalnih števil je vedno iracionalno število.
- P** Obstajata neničelni kompleksni števili z in w , da je $z^2 + w^2 = 0$.
- N** Množica $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 4\}$ določa nek Dedekindov rez.
- P** Če za zaporedje realnih števil (a_n) velja $|a_n| < \frac{1}{2^n}$, je zaporedje (a_n) konvergentno.
- N** Vsako konvergentno zaporedje realnih števil je monotono in omejeno.
- N** Množici $[0, 1]$ in $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ sta ekvipolentni.
- P** Vsaka neskončna podmnožica množice racionalnih števil je števno neskončna.
- P** Zaporedje realnih števil s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{n+1}$ je Cauchyjevo.

(2) (a) Pokaži, da za vsako naravno število n velja neenakost

$$n! > \frac{n^n}{e^n}.$$

(b) Poišči vsa naravna števila n , za katera je število

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+5}$$

racionalno.

Rešitev: (a) Nalogo bomo rešili z indukcijo.

$n = 1$:

$$1 > \frac{1}{e}.$$

$n \rightarrow n + 1$:

Privzemimo sedaj, da za nek $n \in \mathbb{N}$ velja $n! > \frac{n^n}{e^n}$. Z uporabo induksijske predpostavke od tod sledi

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1) \cdot \frac{n^n}{e^n}.$$

Sedaj moramo pokazati, da je

$$(n+1) \cdot \frac{n^n}{e^n} > \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}.$$

To neenakost lahko preoblikujemo v neenakost

$$e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ki pa velja za vsako naravno število n , ker je zaporedje $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ naraščajoče z limito e .

(b) Denimo, da je število $\sqrt{n} + \sqrt{n+5}$ racionalno. Potem je racionalno tudi število

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+5})^2 = n + 2\sqrt{n^2 + 5n} + n + 5 = 2n + 5 + 2\sqrt{n^2 + 5n}$$

in posledično tudi število $\sqrt{n^2 + 5n}$. Na vajah smo pokazali, da je koren naravnega števila racionalen natanko takrat, ko je to število popoln kvadrat. Iščemo torej naravna števila n , za katere je število $n^2 + 5n$ popoln kvadrat. Iz ocene

$$n^2 < n^2 + 5n < (n+3)^2 = n^2 + 6n + 9$$

sledi, da imamo le dve možnosti. Bodisi je $n^2 + 5n = (n+1)^2$ ali pa $n^2 + 5n = (n+2)^2$. V prvem primeru je $n = \frac{1}{3}$, v drugem pa $n = 4$. Število $\sqrt{n} + \sqrt{n+5}$ je torej racionalno le v primeru, ko je $n = 4$. \square

- [1] Baza indukcije.
- [4] Uporaba induksijske predpostavke.
- [5] Dokaz induksijskega koraka.
- [5] Sklep, da je število $\sqrt{n^2 + 5n}$ racionalno.
- [5] Dokaz, da je $n = 4$ edina rešitev.

(3) Dani sta množici:

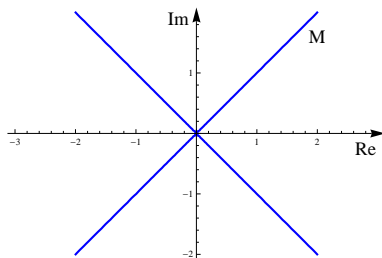
$$M = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z^2) = 0\},$$

$$M' = \{z \in \mathbb{C}; -iz^4 \in M\}.$$

(a) Skiciraj množici M in M' .

(b) Pokaži, da je M ekvipolentna \mathbb{R} tako, da konstruiráš injektivni preslikavi $i : M \rightarrow \mathbb{R}$ in $j : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Rešitev: (a) Pišimo $z = x + iy$. Potem velja $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ in $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2$. Množica M je torej množica kompleksnih števil, za katere je $x^2 = y^2$ oziroma $y = \pm x$. To je ravno unija simetral lihih in sodih kvadrantov.



V M' so vsa kompleksna števila z , za katere je $-iz^4 = w$ za nek $w \in M$. To enakost lahko prepišemo v obliko $z^4 = iw$. Če je $w \in M$, je tudi $iw \in M$ in obratno. Zato je v bistvu množica M' ravno množica vseh 4-tih korenov števil iz množice M . Množico M lahko razdelimo na unijo štirih poltrakov in točke 0. Števila, ki ležijo na poltraku v prvem kvadrantu, so oblike $a = |a|e^{i\frac{\pi}{4}}$, njihovi četrti koreni pa so:

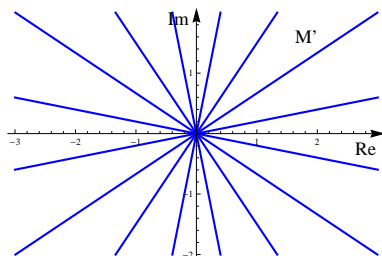
$$z_0 = \sqrt[4]{|a|}e^{i\frac{\pi}{16}},$$

$$z_1 = \sqrt[4]{|a|}e^{i\frac{9\pi}{16}},$$

$$z_2 = \sqrt[4]{|a|}e^{i\frac{17\pi}{16}},$$

$$z_3 = \sqrt[4]{|a|}e^{i\frac{25\pi}{16}}.$$

Ko število a preteče poltrak v prvem kvadrantu, njegovi četrti koreni pretečejo poltrake, ki imajo polarne kote $\{\frac{\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{17\pi}{16}, \frac{25\pi}{16}\}$. Podobno za vsakega od preostalih treh poltrakov dobimo štiri nove poltrake, od točke 0 pa točko 0. Skica množice M' je na spodnji sliki.



(b) Preslikavo $j : \mathbb{R} \rightarrow M$ bomo definirali tako, da bomo realna števila bijektivno preslikali na simetralo lihih kvadrantov. Ta preslikava ima predpis

$$j(x) = x + ix, x \in \mathbb{R}.$$

V obratno smer bomo preslikavo $i : M \rightarrow \mathbb{R}$ definirali tako, da bo simetralo lihih kvadrantov preslikala na pozitivni poltrak realnih števil, simetralo sodih kvadrantov na negativni poltrak, število $z = 0$ pa v $x = 0$. Predpis lahko definiramo takole:

$$\begin{aligned}i(x + ix) &= e^x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\i(x - ix) &= -e^x, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\i(0) &= 0.\end{aligned}$$

□

- [3] Opis in skica množice M .
- [7] Opis in skica množice M' .
- [3] Predpis preslikave j .
- [7] Predpis preslikave i .

(4) Podano je rekurzivno zaporedje

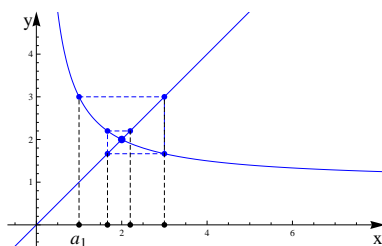
$$a_{n+1} = 1 + \frac{2}{a_n}, \quad a_1 = 1.$$

(a) Grafično ponazori njegovo obnašanje.

(b) Dokaži, da je zaporedje konvergentno in določi njegovo limito.

Nasvet: Zaporedje razbij na dve monotoni, rekurzivno podani podzaporedji.

Rešitev: (a) Da dobimo občutek, kaj se z zaporedjem dogaja, si pogledjmo diagram.



Z grafa sklepamo, da bo pri začetni vrednosti $a_1 = 1$ zaporedje osciliralo okoli vrednosti $a = 2$ in k njej konvergiralo, a ne monotono.

(b) Pokazali bomo, da podzaporedje iz lihih členov narašča proti 2, podzaporedje iz sodih členov pa pada proti 2. Najprej izrazimo

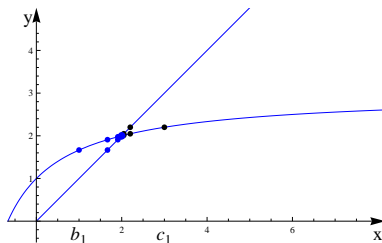
$$a_{n+2} = 1 + \frac{2}{a_{n+1}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{a_n}} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}.$$

Definirajmo sedaj podzaporedji $b_k = a_{2k-1}$ in $c_k = a_{2k}$. Ti dve zaporedji zadoščata rekurzivnima zvezama:

$$b_{k+1} = \frac{3b_k + 2}{b_k + 2},$$

$$c_{k+1} = \frac{3c_k + 2}{c_k + 2}$$

pri začetnih pogojih $b_1 = a_1 = 1$ in $c_1 = a_2 = 3$. Z diagrama



lahko sedaj preberemo, da zaporedje (b_k) narašča proti 2, zaporedje (c_k) pa pada proti 2.

Označimo $g(x) = \frac{3x+2}{x+2}$. Za $0 < x < 2$ potem velja

$$x < g(x) < 2.$$

Če v to zvezo vstavimo $x = b_1$ in $x = b_k$, lahko induktivno dokažemo, da je:

$$\begin{aligned}b_1 &< b_2 < 2, \\ b_k &< b_{k+1} < 2,\end{aligned}$$

od koder sledi, da je zaporedje (b_k) naraščajoče in navzgor omejeno z 2. Torej je konvergentno. Če označimo $b = \lim_{k \rightarrow \infty} (b_k)$, mora veljati

$$b = \frac{3b + 2}{b + 2}.$$

Ta enačba ima rešitvi $b \in \{-1, 2\}$, v našem primeru pa je limita $b = 2$. Podobno lahko pokažemo, da tudi zaporedje (c_k) konvergira k 2.

Pokažimo sedaj, da tudi zaporedje (a_n) konvergira k 2. Po pravkar dokazanem lahko za vsak $\epsilon > 0$ najdemo tak $N \in \mathbb{N}$, da za $k > N$ velja $|b_k - 2| < \epsilon$ in $|c_k - 2| < \epsilon$. Torej za $k > N$ velja $|a_{2k-1} - 2| < \epsilon$ in $|a_{2k} - 2| < \epsilon$, kar pa pomeni, da za $n > 2N$ velja $|a_n - 2| < \epsilon$. \square

- [6] Skica diagrama in sklep, da zaporedje oscilira okoli vrednosti $a = 2$.
- [4] Izpeljava rekurzivne formule za podzaporedji.
- [6] Dokaz, da podzaporedji konvergirata k 2.
- [4] Dokaz, da zaporedje (a_n) konvergira k 2.

(5) (a) Pokaži, da je zaporedje realnih števil (a_n) s splošnim členom

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}$$

omejeno.

(b) Pokaži, da je zaporedje (a_n) konvergentno in izračunaj njegovo limito.

Rešitev: (a) Najprej bomo pokazali, da je zaporedje (a_n) padajoče. V ta namen izračunajmo kvocient dveh zaporednih členov

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{2^{3n+3}((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{8(n+1)^2} = \frac{2n+1}{4n+4} < 1.$$

Torej je $a_{n+1} < a_n$, kar pomeni, da je zaporedje (a_n) padajoče in posledično navzgor omejeno. Ker so vsi členi zaporedja (a_n) pozitivni, je tudi navzdol omejeno.

(b) Ker je zaporedje (a_n) padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno. Označimo

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n).$$

V točki (a) smo mimogrede že izpeljali, da zaporedje zadošča rekurzivni zvezi

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{4n+4} a_n.$$

Če izračunamo limito na obeh straneh te enakosti, dobimo, da je

$$a = \frac{1}{2}a,$$

kar pomeni, da je $a = 0$. □

- [8] Dokaz, da je zaporedje (a_n) padajoče.
- [2] Sklep, da je zaporedje omejeno.
- [2] Sklep, da je zaporedje konvergentno.
- [8] Izračun limite zaporedja.