

Analiza 1

2. kolokvij

5. 2. 2018

1. naloga (20 točk)

P Na $(0, 1)$ je vsaka strogo naraščajoča funkcija injektivna.

P Obstaja tak $s > 0$, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$ konvergentna in ni absolutno konvergentna.

N Funkcija f , definirana na okolici točke a , je v a zvezna, če je $\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$.

P Če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n > 0$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna.

N Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna natanko tedaj, ko je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

N Če za funkcijo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$ in $f(0) = 0$, je zvezna v točki $x = 0$.

P Če je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, obstaja $x \neq 0$, za katerega velja: $|x| < \frac{1}{2018}$ in $f(x) > 2018$.

N Če je funkcija $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ nezvezna le v končno mnogo točkah, je omejena.

N Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ je konvergentna.

N Funkciji $\ln |x|$ in $\arcsin(|x - 1|)$ imata enako definicijsko območje.

Točkovnik:

+2 Vsak pravilen odgovor.

0 Prvi nepravilen odgovor.

-2 Vsak naslednji nepravilen odgovor.

2. naloga (20 točk)

(a) Obravnavaj konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!!}.$$

(b) Za $x > 0$ obravnavaj absolutno in pogojno konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x^{2018} + n}{x + n} \right)^{n^2}.$$

Rešitev: Označimo z a_n člene prve vrste. Čeprav so pozitivni kvocientni kriterij ne poda odgovora, saj velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{2n+3} = 1.$$

Pomagamo si Raabejevim kriterijem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

Vrsta je divergentna! Do tega odgovora se da priti tudi s primerjalnim kriterijem, saj velja:

$$\frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!!} > \frac{2^n \cdot n!}{(2n+2)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n+2)!!} = \frac{1}{2n+2}.$$

V točki b) najprej obravnavamo absolutno konvergenco s pomočjo korenskega kriterija:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \left(\frac{x^{2018} + n}{x + n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left(1 + \frac{x^{2018} - x}{x + n} \right)^n = e^{x^{2018} - x}.$$

Za $0 < x < 1$ je potenca v izrazu na desni negativna, zato je vrsta absolutno konvergentna. Nasprotno za $x > 1$ vrsta absolutno divergira. Ker velja tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x^{2018} + n}{x + n} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{n(x^{2018} - x)} \neq 0,$$

v tem primeru nimamo niti pogojne konvergence. Nazadnje si oglejmo še primer, ko je $x = 1$. V tem primeru dobimo znano pogojno konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Točkovnik:

+7 Divergenca prve vrste (v primeru, da le kvocientni kriterij +3).

+7 Absolutna konvergenca za $0 < x < 1$.

+3 Divergenca za $x > 0$.

+3 Pogojna konvergenca za $x = 1$.

3. naloga (20 točk)

Podana je množica točk

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y(y-1) = x^2\}.$$

- (a) Nariši množico G .
- (b) Dokaži, da obstaja neskončno mnogo injektivnih funkcij, ki so definirane za vsa realna števila, njihov graf pa je vsebovan v množici G . Določi tudi število naraščajočih funkcij s temi lastnostmi.
- (c) Zapiši predpis za eno izmed naraščajočih funkcij iz (b) ter določi njen levi inverz.

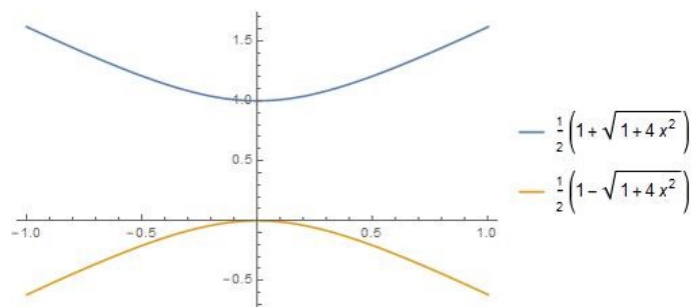
Rešitev: Enačbo, ki podaja G , lahko preoblikujemo v

$$(y - \frac{1}{2})^2 - x^2 = \frac{1}{4}.$$

Množica je torej hiperbola, prezrcaljena preko simetrane lihih kvadrantov (vlogi x in y sta zamenjani). To ugotovimo tudi, če za $x \in \mathbb{R}$ obravnavamo ničle kvadratne enačbe

$$y^2 - y - x^2 = 0 \Rightarrow y_{1,2}^x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4x^2}).$$

V vsakem primeru, dobimo spodnjo sliko.



Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bo imela graf v G , če bo za vsak $x \in \mathbb{R}$ veljalo $f(x) \in \{y_1^x, y_2^x\}$. Nadalje bo injektivna, če bo izpolnjen tudi pogoj $f(-x) \neq f(x)$ (vsaka vodoravnica lahko izbrane točke seka največ enkrat). Takih funkcij je neštevno mnogo, saj pogojem zadoščajo že take oblike

$$f_a(x) = \begin{cases} y_1^x & x \in (-\infty, -a] \cup (0, a) \\ y_2^x & x \in (-a, 0] \cup [a, \infty) \end{cases}, \quad a > 0.$$

Vseeno sta naraščajoči le dve izmed njih:

$$f_1(x) = \begin{cases} y_2^x, & x \leq 0 \\ y_1^x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad f_2(x) = \begin{cases} y_2^x, & x < 0 \\ y_1^x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Njuna leva inverza sta oblike

$$g_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - x}, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - x}, & x > 1 \\ h_1(x), & x \in (-1, 1] \end{cases} \quad \text{in} \quad g_2(x) = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - x}, & x < 1 \\ \sqrt{x^2 - x}, & x \geq 1 \\ h_2(x), & x \in [-1, 1) \end{cases}.$$

Funkciji h_1 in h_2 lahko izberemo poljubno.

Točkovnik:

- +5 Skica množice G .
- +5 Razlaga, zakaj je injektivnih funkcij z grafom v G neskončno mnogo.
- +5 Določitev števila in predpisa naraščajočih funkcij.
- +5 Določitev levega inverza.

4. naloga (20 točk)

(a) Podana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Določi točke $a \in \mathbb{R}$, v katerih je f zvezna oz. nezvezna. Svoje trditve tudi dokaži.

(b) Določi $a \in \mathbb{R}$, da bo za $f(x) = \frac{ax^2 + \sin^2 x}{x^2 + 1 - \cos x}$ veljalo $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Rešitev: Funkcija f iz (a) je zvezna v točkah $a = 0$ in $a = 1$, saj za poljuben $\epsilon > 0$ velja

$$|x| < \delta_0 \Rightarrow |f(x)| < \epsilon,$$

$$|x - 1| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon,$$

kjer sta $\delta_0 = \min\{\sqrt{\epsilon}, \epsilon\}$ in $\delta_1 = \min\{\epsilon/2, 1\}$. Alternativno lahko zveznost v omenjenih točkah utemeljimo tudi tako, da pokažemo, da za $a \in \{0, 1\}$ velja

$$\lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x) = f(a) = a$$

oz. da za poljubno zaporedje $a_n \rightarrow a$ velja $f(a_n) \rightarrow f(a)$, ko $n \rightarrow \infty$ (razbijemo ga na dve racionalno in iracionalno podzaporedje in pokažemo, da v obeh primerih izpolnjuje želeni pogoj).

Zaporedja lahko uporabimo tudi za potrditev nezveznosti f v točkah $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Na primer, če je a racionalen, izberemo $a_n = a + \frac{\pi}{n}$, če pa je iracionalen pa naj bo člen a_n enak zapisu števila a na n decimalk natančno. V obeh primerih velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(a).$$

Alternativno lahko poiščemo tudi konkreten $\epsilon > 0$, za katerega primeren $\delta > 0$ ne obstaja, argument, da nezveznost 'sledi iz grafa', pa je nesprejemljiv.

V točki b) izračunamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + \frac{\sin^2 x}{x^2}}{1 + \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)}} = \frac{a + 1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}(a + 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{\sin^2 x}{x^2}}{1 + \frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{a + 0}{1 + 0} = a.$$

V drugi limiti uporabili dejstvo, da sta $\sin x$ in $1 - \cos x$ omejeni. Dobimo $a = 2$.

Točkovnik:

+3 Določitev točk zveznosti oz. nezveznosti.

+5 Dokaz zveznosti za $a = 0$ in $a = 1$ (+3 za zgolj eno točko).

+5 Dokaz nezveznosti v preostalih točkah (+3 za zgolj eno alternativno).

+7 Izračun limit (dvakrat +3) in določitev ustreznega a .

Opomba: Nekateri ste se računanja limit v točki (b) lotili z L'Hospitalovim pravilom, ki ga na vajah še nismo obravnavali. Tudi tak izračun je bil priznan.

5. naloga (20 točk)

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna vrsta in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pogojno konvergentna vrsta.

(a) Pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ ni absolutno konvergentna.

(b) Pokaži, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolutno konvergentna. S protiprimerom pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ ni nujno absolutno konvergentna.

Rešitev: Po trikotniški neenakosti velja

$$|a_n + b_n| \geq ||a_n| - |b_n|| \geq |b_n| - |a_n| \Rightarrow |b_n| \leq |a_n| + |a_n + b_n|.$$

Če je torej vrsta s členi $|a_n + b_n|$ konvergentna, je taka tudi vrsta s členi $|b_n|$, to pa je protislovje. Alternativno lahko to potrdimo tudi s preurejanjem vrstnega reda. Naj bodo S_n^a , S_n^b in S_n^{a+b} delne vsote ustreznih vrst. Ker so vse tri vsaj pogojno konvergentne, velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{a+b} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^a + S_n^b) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^a + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b.$$

Sedaj preuredimo vrsto s členi b_n tako, da dobimo drugačno limito $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^b$. Ker se s tem spremeni tudi limita $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{a+b}$ obravnavana vrsta ne more biti absolutno konvergentna.

Ker je vrsta s členi b_n konvergentna, velja $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Torej za $n \geq n_0$ velja

$$|b_n| < 1 \Rightarrow |a_n b_n| < |a_n|.$$

Po primerjalnem kriteriju je vrsta s členi $a_n b_n$ absolutno konvergentna. Protiprimer za preostalo trditev iz točke b) je na primer $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Točkovnik:

+8 Dokaz v točki (a).

+7 Dokaz v točki (b).

+5 Protiprimer.