

Rešitve 3. kolokvija iz Analize 1

- (1) **N** Naj bosta $f, g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljivi funkciji. Potem velja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- N** Naj bo $F : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ primitivna funkcija funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$, za katero je $F(1) = -1$. Potem je $F(-1) = 1$.
- N** Vsaka funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ki je odvedljiva na $(-1, 1)$, je zvezna na $[-1, 1]$.
- P** Če za odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja $f(x) \leq f(1)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, je $f'(1) = 0$.
- N** Če je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ odvedljiva in omejena, je f enakomerno zvezna na \mathbb{R} .
- P** Predpis $\vec{r}(t) = (\sin t, 2 + \cos t)$ določa parametrizacijo krožnice v \mathbb{R}^2 .
- P** Vsaka zvezna funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ima primitivno funkcijo.
- N** Če je odvedljiva funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ omejena, ima vsaj eno stacionarno točko.
- P** Če graf odvedljive funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seka premico $y = 1$ v dveh različnih točkah, ima f stacionarno točko.
- N** Če je odvedljiva funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo naraščajoča, je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

(2) Ravninska krivulja K je podana v parametrični obliki s predpisom:

$$\begin{aligned}x(t) &= te^{-2t^2}, \\y(t) &= \frac{t}{1+t^2}\end{aligned}$$

za $t \in \mathbb{R}$.

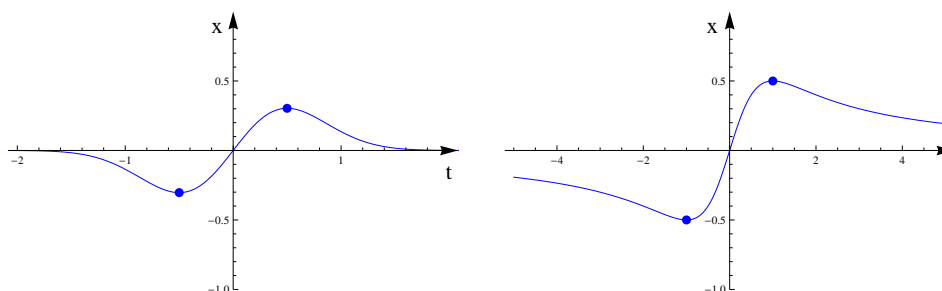
(a) S pomočjo odvoda skiciraj grafa funkcij x in y .

(b) Skiciraj krivuljo K . Še posebej natančno opiši njeno obnašanje v okolici točke $(0, 0)$.

Rešitev: (a) Funkcija x ima ničlo $t = 0$ in asimptoto $x = 0$, funkcija y pa ničlo $t = 0$ in asimptoto $y = 0$. Odvoda komponent sta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - 4t^2)e^{-2t^2}, \\ \dot{y} &= \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2}.\end{aligned}$$

Funkcija x ima stacionarni točki $t_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ funkcija y pa stacionarni točki $t_{3,4} = \pm 1$. Poglejmo grafa obeh komponent.

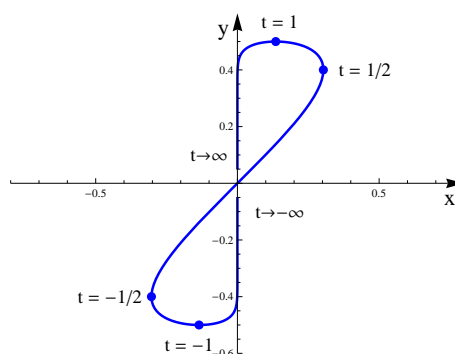


(b) Ekstremne točke krivulje K so točke:

$$\begin{aligned}\vec{r}\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{2}{5}\right), \\ \vec{r}\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(-\frac{1}{2\sqrt{e}}, -\frac{2}{5}\right), \\ \vec{r}(1) &= \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{2}\right), \\ \vec{r}(-1) &= \left(-\frac{1}{e^2}, -\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

V prvih dveh je tangenta na krivuljo navpična, v drugih dveh pa vodoravna.

Z upoštevanjem grafov komponent in ekstremnih točk lahko skiciramo krivuljo.



Vidimo, da krivulja vsebuje točko $(0, 0)$ pri parametru $t = 0$. Ko gre $t \rightarrow \pm\infty$, pa se krivulja približuje točki $(0, 0)$. Naklon krivulje pri parametru t je enak

$$k(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}}{(1-4t^2)e^{-2t^2}}.$$

Torej je $k(0) = 1$, kar pomeni, da krivulja seka x -os pod kotom 45° . Poleg tega pa velja še $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} k(t) = \infty$, od koder sklepamo, da se pri $t \rightarrow \pm\infty$ krivulja približuje točki $(0, 0)$ v navpični smeri. \square

- [6] Ničle, asimptote, odvod in graf funkcije x .
- [4] Ničle, asimptote, odvod in graf funkcije y .
- [6] Skica krivulje.
- [4] Obravnava krivulje v okolici točke $(0, 0)$.

(3) Izračunaj nedoločena integrala:

(a) $\int \frac{7x+6}{x^3-2x-4} dx,$

(b) $\int x \arctg(\sqrt{x}) dx.$

Rešitev:

(a) $\int \frac{7x+6}{x^3-2x-4} dx :$

Dano racionalno funkcijo bomo integrirali z nastavkom. Imenovalce lahko razcepimo v obliki $x^3 - 2x - 4 = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$, zato bomo vzeli nastavek

$$\int \frac{7x+6}{x^3-2x-4} dx = A \ln|x-2| + B \ln(x^2+2x+2) + C \arctg(x+1).$$

Z odvajanjem pridemo do enakosti:

$$\begin{aligned} \frac{7x+6}{x^3-2x-4} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B(2x+2)}{x^2+2x+2} + \frac{C}{1+(x+1)^2}, \\ &= \frac{Ax^2+2Ax+2A+2Bx^2-2Bx-4B+Cx-2C}{x^3-2x-4}. \end{aligned}$$

Dobljeni sistem enačb:

$$\begin{aligned} A+2B &= 0, \\ 2A-2B+C &= 7, \\ 2A-4B-2C &= 6 \end{aligned}$$

ima rešitev $A = 2$, $B = -1$ in $C = 1$. Torej je

$$\int \frac{7x+6}{x^3-2x-4} dx = \underline{\underline{2 \ln|x-2| - \ln(x^2+2x+2) + \arctg(x+1) + C}}.$$

(b) $\int x \arctg(\sqrt{x}) dx :$

Integrirali bomo po delih z izbiro $u = \arctg(\sqrt{x})$ in $dv = x dx$. Potem je $du = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}} dx$, $v = \frac{x^2}{2}$ in

$$\int x \arctg(\sqrt{x}) dx = \frac{x^2}{2} \arctg(\sqrt{x}) - \frac{1}{4} \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x} dx.$$

Za izračun integrala na desni bomo uvedli novo spremenljivko $t = \sqrt{x}$. Od tod sledi $dx = 2t dt$ in

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x} dx = 2 \int \frac{t^4}{1+t^2} dt = 2 \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x} + 2 \arctg(\sqrt{x}) + C.$$

Rezultat naloge pa je

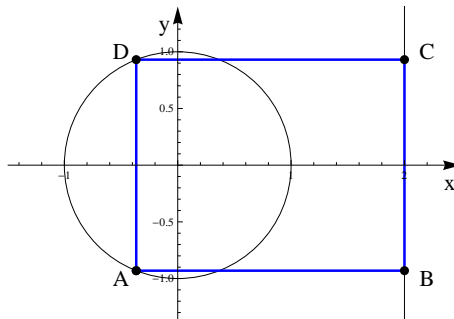
$$\int x \arctg(\sqrt{x}) dx = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} \arctg(\sqrt{x}) - \frac{1}{6} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{x} - \frac{1}{2} \arctg(\sqrt{x}) + C}}$$

□

- [2] Faktorizacija imenovalca.
- [6] Integracija racionalne funkcije.
- [2] Rezultat.
- [5] Integracija po delih.
- [3] Uvedba nove spremenljivke.
- [2] Rezultat.

- (4) V ravnini \mathbb{R}^2 sta dani krožnica z enačbo $x^2 + y^2 = 1$ in premica z enačbo $x = 2$. Izmed vseh pravokotnikov, ki imajo dve oglišči na krožnici, dve pa na premici, poišči tistega z največjo ploščino.

Rešitev: Najprej pogledjmo skico.



Označimo z A , B , C in D oglišča pravokotnika. Koordinati točk A in D sta potem $A(x, -\sqrt{1-x^2})$ in $D(x, \sqrt{1-x^2})$. Od tod sledi $|AB| = 2 - x$ in $|AD| = 2\sqrt{1-x^2}$, zato je ploščina pravokotnika $ABCD$ enaka

$$S(x) = 2(2-x)\sqrt{1-x^2}.$$

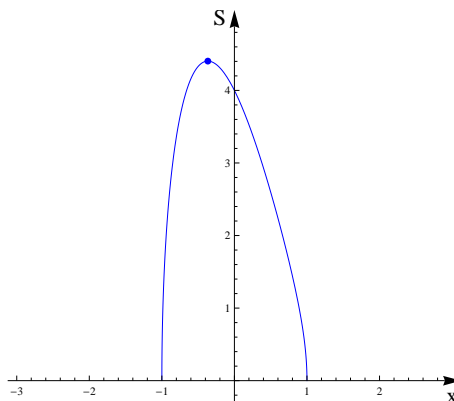
Iščemo maksimum zvezne funkcije S na intervalu $[-1, 1]$. Odvod funkcije S je enak

$$S'(x) = -2\sqrt{1-x^2} - 2(2-x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Stacionarne točke so rešitve enačbe:

$$\begin{aligned} -2\sqrt{1-x^2} - 2(2-x)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} &= 0, \\ 1-x^2 + (2-x)x &= 0, \\ 2x^2 - 2x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Izmed ničel te kvadratne enačbe leži v intervalu $[-1, 1]$ le ničla $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Kandidati za ekstreme funkcije S so torej točke $\{-1, 1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\}$. Iz vrednosti $S(-1) = S(1) = 0$ in $S(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) > 0$ pa sledi, da ima S maksimum v točki $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.



□

- [4] Skica.
- [4] Izražava ploščine s parametrom x .
- [8] Izračun odvoda in stacionarne točke S .
- [4] Dokaz, da ima S maksimum v točki $x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (5) (a) Naj bo zvezna funkcija $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva na intervalu $(0, 2)$. Denimo, da velja $f(0) = f(2) = 0$ in $f(1) = 2$. Pokaži, da obstaja taka točka $c \in (0, 2)$, da je $f'(c) = 1$.
- (b) Poišči odvedljivo funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $f'(x) = |x|$. Poišči tudi funkcijo, ki je dvakrat odvedljiva, ni pa dvakrat zvezno odvedljiva. V obeh primerih natančno utemelji, zakaj dani funkciji ustrezata zahtevam.

Rešitev: (a) Najprej bomo dvakrat uporabili Lagrangeev izrek za funkcijo f na intervalih $[0, 1]$ in $[1, 2]$. Tako dobimo točki $t_1 \in (0, 1)$ in $t_2 \in (1, 2)$, za kateri velja:

$$f'(t_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2,$$

$$f'(t_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -2.$$

Ker je funkcija f' zvezna na intervalu $[t_1, t_2]$, na tem intervalu zavzame vse vrednosti med -2 in 2 . Torej obstaja $c \in (t_1, t_2) \subset (0, 2)$, da je $f'(c) = 1$.

(b) Definirajmo funkcijo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & ; x > 0, \\ -\frac{x^2}{2} & ; x < 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Za $x > 0$ potem velja $f'(x) = x$, za $x < 0$ pa $f'(x) = -x$. Torej je $f'(x) = |x|$ za $x \neq 0$. Posebej bomo še preverili, da je f odvedljiva v $x = 0$ in izračunali njen odvod. Velja:

$$\lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \uparrow 0} -\frac{x^2}{2x} = 0,$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{x^2}{2x} = 0.$$

Torej je f odvedljiva tudi v $x = 0$ in velja $f'(0) = 0 = |0|$.

Sedaj definirajmo funkcijo $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom

$$g(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Izračunamo lahko, da je

$$g'(x) = \begin{cases} 4x^3 \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

in

$$g''(x) = \begin{cases} 12x^2 \sin \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0, \\ 0 & ; x = 0. \end{cases}$$

Vidimo, da je g dvakrat odvedljiva, vendar pa g'' ni zvezna v $x = 0$. □

- [6] Uporaba Lagrangeevega izreka.
- [4] Dokaz obstoja točke $c \in (0, 2)$, za katero je $f'(c) = 1$.
- [4] Konstrukcija funkcije, za katero je $f'(x) = |x|$.
- [6] Konstrukcija dvakrat odvedljive funkcije, ki ni dvakrat zvezno odvedljiva.