LINEARNA ALGEBRA 2018/19
4. DOMAČA NALOGA

1. Pokaži, da so naslednje grupe izomorfne

   a.) $(\mathbb{Z}_n, +)$

   b.) $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ za množenje.

   c.) $\{k + n\mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, kjer je $k + n\mathbb{Z} = \{\dots, k-2n, k-n, k, k+n, k+2n, \dots\}$ in $k_1 + n\mathbb{Z} + k_2 + n\mathbb{Z} = (k_1 + k_2) + n\mathbb{Z}$.
   Namig: pokaži da velja $\{k + n\mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{k + n\mathbb{Z} \mid k = 0, \dots, n-1\}$.

2. Pokaži, da je $\mathbb{Z}_{nm} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$, če je n tuj m. (Namig: Oglej si $f(1) = (1, 1)$.)

3. Pokaži da je $H \subset G$ podgrupa grupe G natanko tedaj, ko je za vse $h_1, h_2 \in H$ tudi $h_1 h_2^{-1} \in H$.

4. Naj bosta H_1 in H_2 podgrupi G Pokaži, da je presek podgrup H_1 in H_2 največja podgrupa, ki je vsebovana v H_1 in H_2. Poišči primer grupe G in podgrup H_1 H_2, da $H_1 \cup H_2$ ni podgrupa.

   Naj bo G abelova grupa. Poišči najmanjšo podgrupo, ki vsebuje H_1 in H_2.

5. Naj bo $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_m) \in S_n$ cikel dolžine m. Poišči najmanjši $k \geq 1$, da bo $\sigma^k = \mathrm{Id}$. Naj bo $\pi = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_j$ produk disjunktnih ciklov, kjer je σ_i dolg m_i. Poišči najmanjši $k > 0$, da bo $\pi^k = \mathrm{Id}$.

   Dokaži da je $\pi^{n!} = \mathrm{Id}$ za vse $\pi \in S_n$. Poišči najmanjše število (večje od 0), da bo π^k za vse $\pi \in S_5$

6. Ali ima 6 multiplikativen inverz v $\mathbb{Z}_{13}/\mathbb{Z}_{14}/\mathbb{Z}_{25}$. Če obstaja, ga določi.

7. Pokaži, da $S_1 = \{a + b\sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ni podkolobar realnih števil. Poišči najmanjši (glede na vsebovanost) podkolobar S_2 realnih števil, ki vsebuje S_1. Pokaži, da je S_2 tudi polje.

8. Naj bo $f(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ in $h(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$. Pokaži, da obstajata polinoma $p(x), q(x) \in \mathbb{Q}[x]$, ki rešita enačbo

   $$p(x)f(x) + q(x)g(x) = h(x)$$

   in ju poišči.

9. Naj bo $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Definiramo seštevanje

   $$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k.$$

   Množenje določimo s predpisom $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ in $ai = ia, aj = ja, ak = ka$ za vse $a \in \mathbb{R}$. Predpis z asociativnostjo in distributivnostjo razširimo na celoten $\mathbb{H}$. Pokaži, da je $\mathbb{H}$ obseg, ki ni komutativen.

   Namig: Oglej si $(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)$.

Pokaži, da je $\mathbb{H}$ izomorfen kolobarju matrik oblike:

$$\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ in } i^2 = -1.$$

Pokaži, da je $S = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ grupa za množenje.

10. Določi naslednja množica vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

    a.) Vsi polinomi $\mathbb{R}[x]$.

    b.) Polinomi stopnje manjše ali enake n $\mathbb{R}[x]_n$.

    c.) Polinomi stopnje enake n.

    d.) $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$.

    e.) $\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$.

    f.) $\{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ zvezna}\}$.

11. Zapiši polinom $7t-1$ kot linearno kombinacijo polinomov $t^2+2t+1, 2t^2-t$ in t^2+2. Ali je zapis enoličen.

12. Pokaži, da je $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i \in \mathbb{Z}_7, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \in \mathbb{Z}_7\}$ vektorski prostor nad $\mathbb{Z}_7$. Določi mu kakšno bazo.