

8. Navadne diferencialne enačbe

8.1. Začetni problem prvega reda

Iščemo funkcijo $y(x)$, ki zadošča diferencialni enačbi

$$y' = f(x, y)$$

in začetnemu pogoju

$$y(x_0) = y_0,$$

kjer je f dana dovolj gladka funkcija x in y .

Numerična rešitev je sestavljena iz zaporedja $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ in pripadajočega zaporedja $y_0, y_1, y_2, \dots$, kjer je vsak y_n približek za rešitev v x_n , oziroma

$$y_n \approx y(x_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Moderne metode avtomatično določajo velikosti korakov $h_n = x_{n+1} - x_n$ tako, da napake približkov y_n ostanejo v vnaprej določenih mejah.

Osnovna delitev metod

Rešujemo začetni problem $y' = f(x, y)$ pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$.

Računamo približke $y_0, y_1, y_2, \dots$ za vrednosti $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots$ v točkah $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$.

Označimo

$y(x_i)$: točna vrednost rešitve v x_i ,
 y_i : izračunani približek za $y(x_i)$.

Metode za reševanje začetnega problema delimo na:

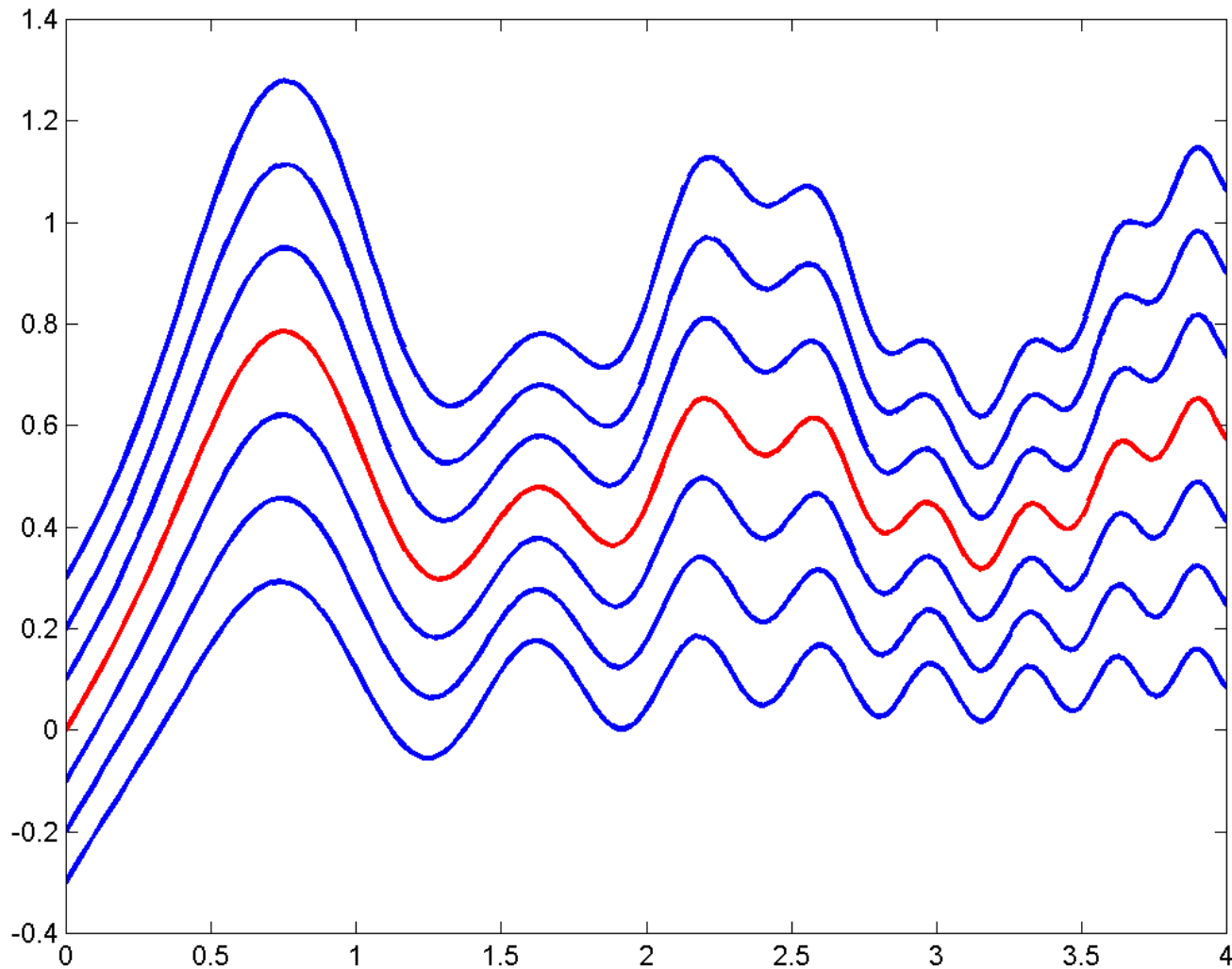
- enokoračne metode: y_{n+1} izračunamo iz y_n ,
- večkoračne metode: y_{n+1} izračunamo iz $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}$.

Metode ločimo še na:

- eksplisitne metode: imamo direktno formulo za y_{n+1} ,
- implicitne metode: y_{n+1} dobimo tako, da rešimo nelinearno enačbo.

Zgled rešitve in vej

Rešitve za $y' = \cos(3x^2) + \sin(4x)y$ pri začetnih pogojih $y(0) = -0.3, -0.2, \dots, 0.3$.



Obstoj rešitve

Funkcija $f(x, y)$, kjer je $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, na območju $D = [a, b] \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ **zadošča Lipschitzovemu pogoju** na y s konstanto L , če za poljubna $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ velja

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Zadostni pogoj, da je f Lipschitzova je, da je f odvedljiva po y , saj je potem lahko

$$L = \max_{(x, y) \in D} |f_y(x, y)|.$$

Če f ustreza Lipschitzovemu pogoju, potem za vsak $(x_0, y_0) \in D$ obstaja podinterval $[a, b]$, ki vsebuje x_0 , na katerem rešitev začetnega problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, obstaja in je enolična.

Občutljivost začetnega problema

Naj f ustreza Lipschitzovemu pogoju s konstanto L . Točna rešitev začetnega problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, je $y(x)$.

Če je $\tilde{y}(x)$ rešitev začetnega problema z zmotenim začetnim pogojem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = \tilde{y}_0$, potem za poljuben $x \geq x_0$ velja

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leq e^{L(x-x_0)} |\tilde{y}_0 - y_0|.$$

Če namesto začetnega problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, rešujemo bližnji problem $\hat{y}' = \hat{f}(x, \hat{y})$, $\hat{f}(x_0) = \hat{y}_0$, velja

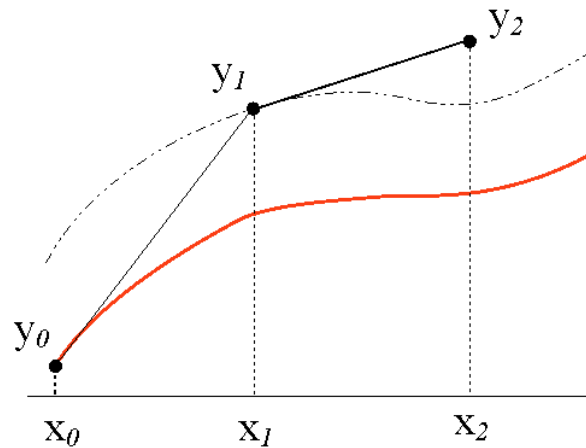
$$|\hat{y}(x) - y(x)| \leq e^{L(x-x_0)} |\hat{y}_0 - y_0| + \frac{e^{L(x-x_0)} - 1}{L} \|\hat{f} - f\|,$$

kjer je $\|\hat{f} - f\| = \max_{(x,y) \in D} |\hat{f}(x, y) - f(x, y)|$.

8.2. Eulerjeva metoda

Najpreprostejša enokoračna metoda je **eksplicitna Eulerjeva metoda** z nastavkom

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ x_{n+1} &= x_n + h\end{aligned}$$



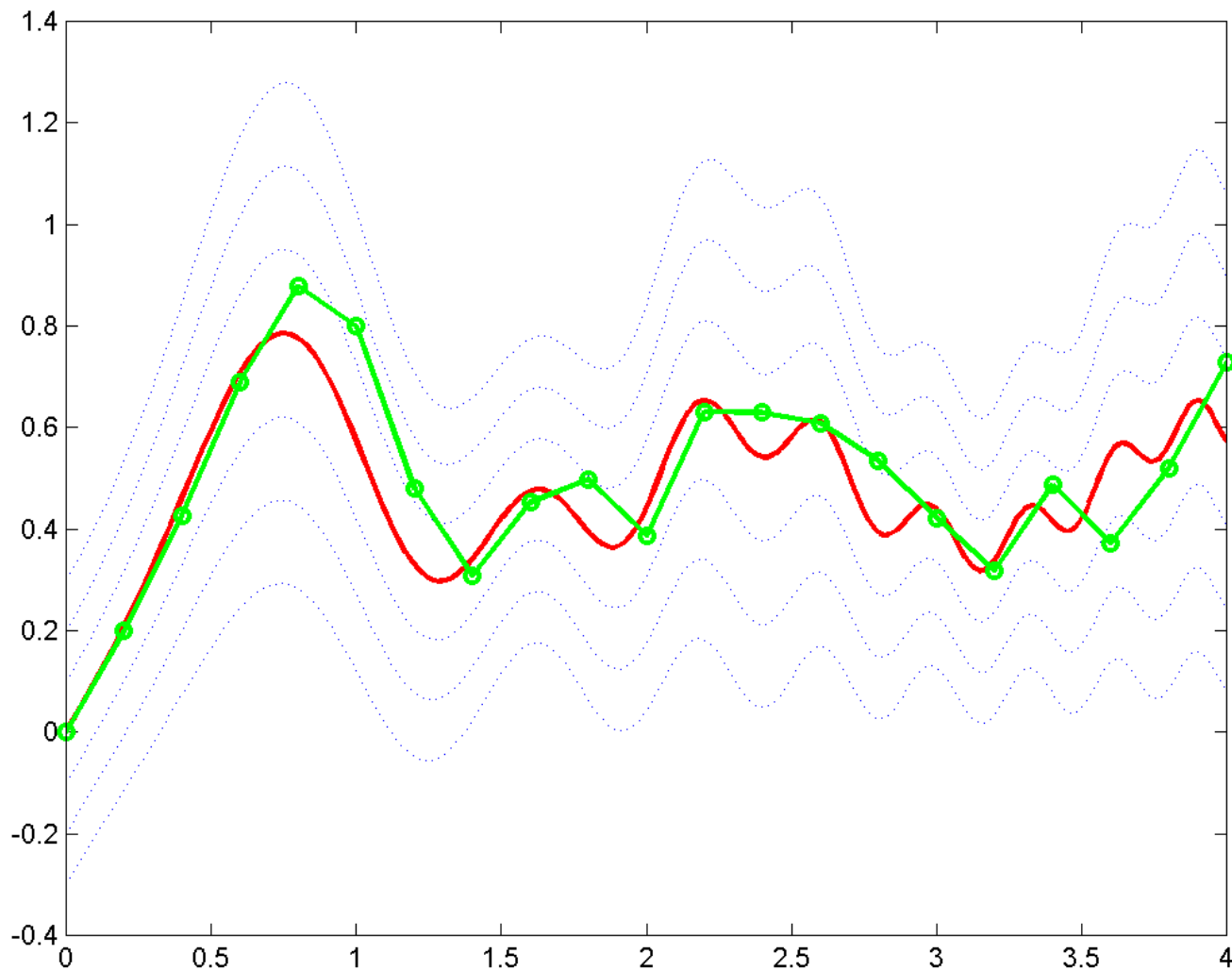
Uporablja fiksni premik h .

Ideja je, da se v vsaki točki premaknemo v smeri tangente.

Implicitna Eulerjeva metoda je $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$. Pri implicitni metodi je potrebno v vsakem koraku rešiti nelinearni sistem za y_{n+1} .

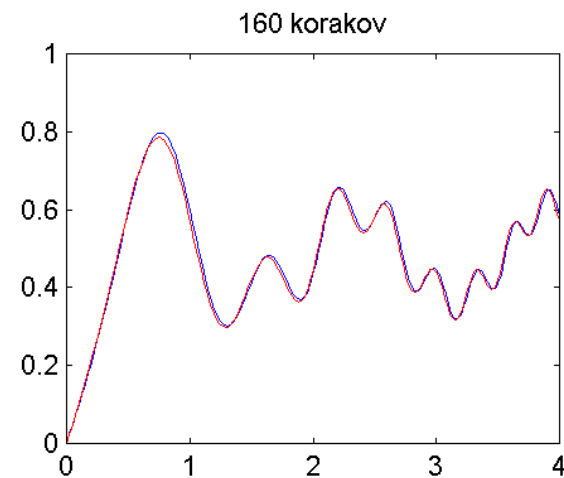
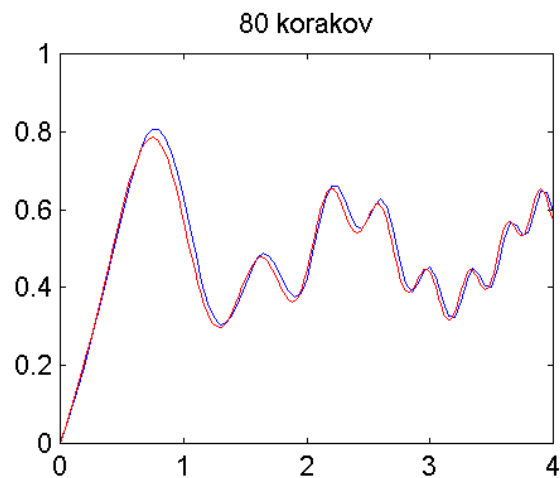
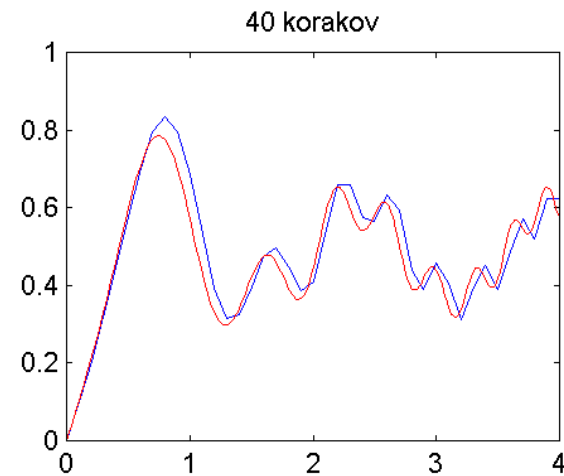
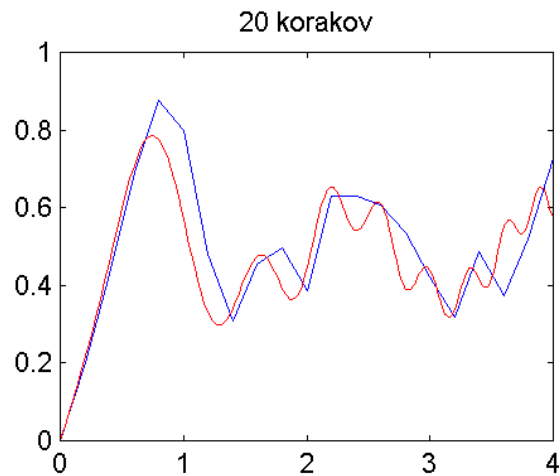
Zgled

EksPLICITNA Eulerjeva metoda na primeru $y' = \cos(3x^2) + \sin(4x)y$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$



Zgled

Primerjava eksplcitne Eulerjeve metode na primeru $y' = \cos(3x^2) + \sin(4x)y$, $y(0) = 1$, interval je $[0, 4]$.



Taylorjeva vrsta

Če $y' = f(x, y)$ odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned}y' &= f \\y'' &= f_x + f_y y' = f_x + f_y f \\y''' &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f) \\&\vdots\end{aligned}$$

Po Taylorjevi vrsti izračunamo $y(x_1) = y(x_0 + h) = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2}y''_0 + \dots$.

Zgled $y' = xy + 1$, $y(0) = 0$, $y(0.2) = ?$

$$\begin{aligned}y' = xy + 1 &\implies y'(0) = 1 \\y'' = xy' + y &\implies y''(0) = 0 \\y''' = xy'' + 2y' &\implies y'''(0) = 2\end{aligned}$$

$$y(h) = h + \frac{1}{3}h^3 + \dots$$

Pri $h = 0.2$ dobimo $y_1 = 0.2 + 0.00267 = 0.20267$. Nadaljujemo s točko $(0.2, 0.20267)$.

Red lokalne napake

Definicija 1. *Pravimo, da je ima metoda lokalno napako reda k , če se pri točni vrednosti $y_n = y(x_n)$ izračunani y_{n+1} ujema z razvojem $y(x_n + h)$ v Taylorjevo vrsto okrog x_n do vključno člena h^k .*

Lokalna napaka predstavlja napako v enem samem koraku.

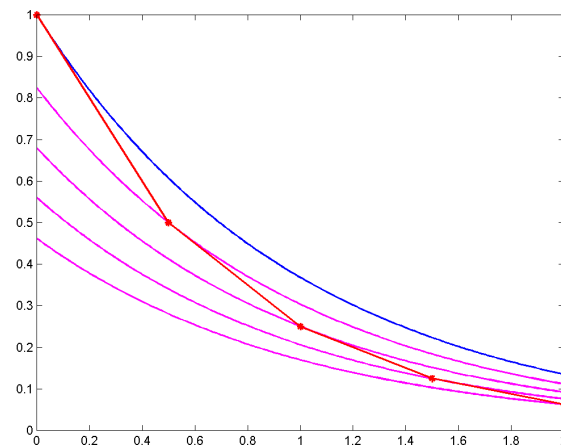
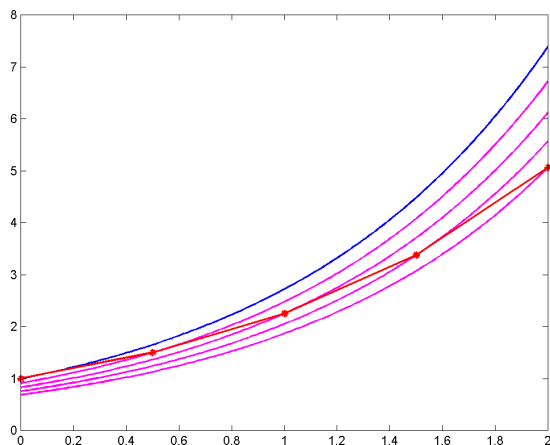
Metoda iz prejšnjega zgleda ima red 3, sicer pa z razvijanjem v Taylorjevo vrsto lahko dobimo metodo poljubnega reda.

Eulerjeva metoda (eksplicitna in implicitna) ima red 1.

V grobem velja, da ima metoda z lokalno napako reda k globalno napako reda $k - 1$.

Globalna napaka

Globalna napaka ni preprosto kar vsota lokalnih napak.



Numerična metoda za reševanje začetnega problema je **stabilna**, kadar majhne motnje ne povzročijo divergence numerične rešitve.

Vsaka enokoračna metoda se da zapisati v obliki $y_{n+1} = y_n + \theta(x_n, y_n, h)$, kjer je $\theta(x, y, h)$ **funkcija prirastka**. Če $\theta(x, y, h)$ zadošča Lipschitzovemu pogoju na y s konstanto L , lokalna napaka v vsakem koraku pa je po absolutni vrednosti omejena z Dh^{p+1} , potem za globalno napako velja

$$|y_n - y(x)| \leq Dh^p \frac{e^{L(x-x_0)} - 1}{L} + e^{L(x-x_0)} |y_0 - y(x_0)|.$$

8.3 Runge-Kutta metode

Najprej izračunamo

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^m \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, m,$$

nato pa

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m \gamma_i k_i.$$

Pri tem je m stopnja R-K metode, kar ne smemo zamenjevati z redom metode. Konstante α_i , β_{ij} in γ_i določimo tako, da se y_{n+1} čim bolj ujema z razvojem $y(x_n + h)$ v Taylorjevo vrsto. Pri tem velja $\alpha_i = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}$.

V primeru, ko je $\beta_{ij} = 0$ za $i \leq j$, je metoda eksplisitna, sicer pa implicitna.

Dvostopenjska eksplicitna Runge-Kutta metoda reda 2

$$\begin{aligned}k_1 &= hf(x_n, y_n) \\k_2 &= hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\y_{n+1} &= y_n + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2.\end{aligned}$$

Z razvijanjem v Taylorjevo vrsto dobimo

$$\begin{aligned}k_1 &= hf \\k_2 &= hf + \alpha h^2 f_x + \beta h k_1 f_y + \mathcal{O}(h^3) \\y_{n+1} &= y_n + (\gamma_1 + \gamma_2)hf + \gamma_2 \alpha h^2 f_x + \gamma_2 \beta h^2 f f_y + \mathcal{O}(h^3),\end{aligned}$$

kar primerjamo z

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + f f_y) + \mathcal{O}(h^3).$$

Sledi

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \alpha \gamma_2 = \frac{1}{2}, \quad \beta \gamma_2 = \frac{1}{2}.$$

Sistem ima več rešitev, saj za poljubni $\gamma_2 \neq 0$ dobimo

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2, \quad \alpha = \frac{1}{2\gamma_2}, \quad \beta = \frac{1}{2\gamma_2}.$$

Zgleda dvostopenjske R-K metode drugega reda sta:

- Heunova metoda

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^3).$$

- modificirana Eulerjeva metoda

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + k_2, \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^3).$$

Štiristopenjska eksplicitna Runge-Kutta metoda reda 4

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^5).$$

Zgled: Rešujemo $y' = -y - 5e^x \sin(x)$, $y(0) = 1$ in vzemimo $h = 0.1$. Dobimo

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1 * f(0, 1) = -0.1$$

$$k_2 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1) = 0.1 * f(0.05, 0.95) = -0.12127$$

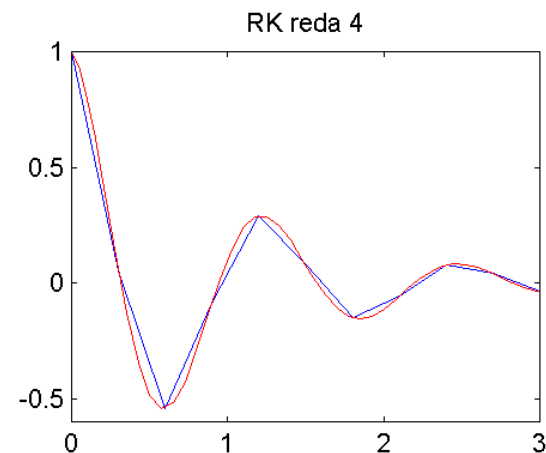
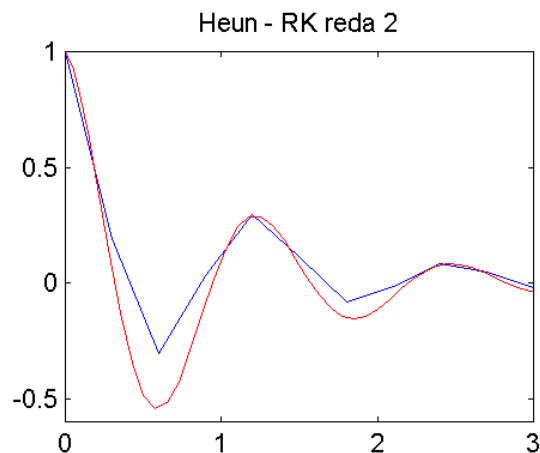
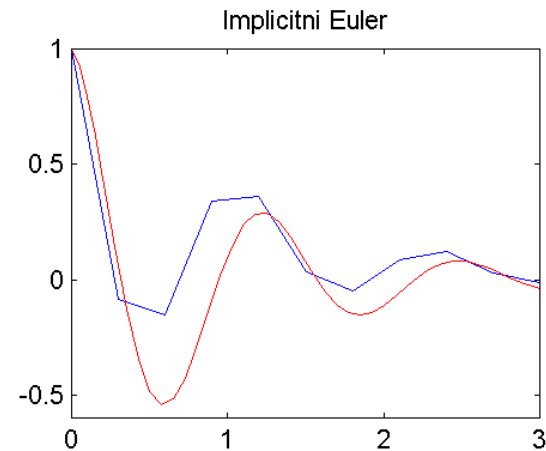
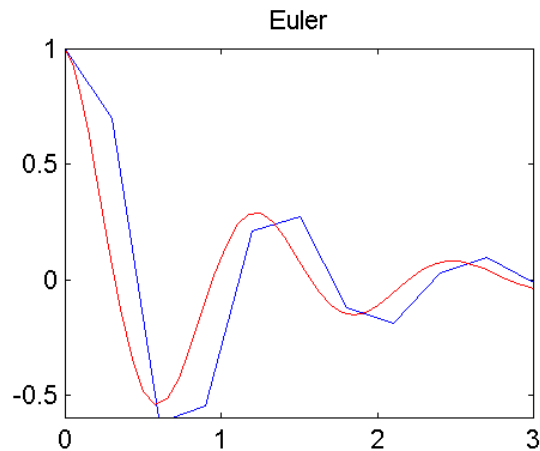
$$k_3 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2) = 0.1 * f(0.05, 0.93936) = -0.12021$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1 * f(0.1, 0.87979) = -0.14315$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.87898.$$

Primerjava metod različnega reda

Na diferencialni enačbi $y' = -y - 5e^{-x} \sin(5x)$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 3]$ primerjamo eksplisitno in implicitno Eulerjevo metodo (red 1), Heunovo metodo (red 2) in Runge-Kuttino metodo reda 4, pri vseh je $h = 0.3$.



8.4 Adaptivna ocena koraka: Runge-Kutta-Fehlbergova metoda

Vzamemo 6 stopenjsko R-K metodo

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, \dots, 6,$$

potem pa iz istih $k_1, \dots, k_6$ sestavimo metodo reda 5

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^6 \gamma_i k_i$$

in metodo reda 4

$$y_{n+1}^* = y_n + \sum_{i=1}^6 \gamma_i^* k_i.$$

Ocena za napako y_{n+1}^* je potem kar $y_{n+1} - y_{n+1}^* = \sum_{i=1}^6 (\gamma_i - \gamma_i^*) k_i$.

Runge-Kutta-Fehlbergova metoda

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$k_6 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6, \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^6)$$

$$y_{n+1}^* = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5, \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^5).$$

V naslednjem koraku vzamemo razmik qh , kjer je ϵ željena natančnost

$$q = \left(\frac{\epsilon h}{2|y_{n+1}^* - y_{n+1}|} \right)^{1/4}.$$

8.5 Reševanje začetnih problemov v Matlabu

Na voljo imamo več funkcij. Ena izmed njih je `ode45`. Kličemo jo v obliki `[x,y]=ode45(fun,span,y0)`, kjer je `fun` ime funkcije `yodv=fun(x,y)`, ki pri x in y (lahko vektor) izračuna vrednosti odvoda iz diferencialne enačbe.

Zgled uporabe:

```
function yprime=fun(t,x)
yprime=-y-5*exp(-t)*sin(5*t);
```

```
tspan=[0 3]; yzero=1;
[x,y]=ode45('fun',tspan,y0)
plot(x,y,'*--');
```

Ostale metode so še `ode23`, `ode113`, `ode23s`,