

1. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

21. 11. 2011

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

S pomočjo izreka o fiksni točki preveri, da ima enačba

$$x = e^{-x^2}$$

natanko eno rešitev v $\mathbb{R}$.

2. naloga

Izračunaj integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

s pomočjo polarnih koordinat.

Nasvet: oglej si I^2 in ga obravnavaj kot dvojni integral, ki ga izračunaš.

3. naloga

Izračunaj odvod funkcije

$$I(x) = \int_0^1 e^{-(x^2+2t+1)^2} dt .$$

4. naloga

Naj bo

$$I = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x \, dz \, dy \, dx .$$

1. Izračunaj I .
2. Prevedi I na sferične koordinate.

2. KOLOKVIJ IZ ANALIZE III

16. 1. 2012

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

(25) Naj bosta $\vec{F}$ ter $\vec{G}$ gladki vektorski polji na $\mathbb{R}^3$. Dokaži zvezo

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}.$$

2. naloga

(a) (15) Izračunaj pretok polja $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, (x^2 + y^2)z)$ skozi rob telesa, ki je presek območij $z > 0$, $z < x^2 + y^2$ in $x^2 + y^2 < 1$. Rob naj bo orientiran z zunanjo normalo.

(b) (10) Izračunaj še pretoke skozi valjasti del roba, okrogli del roba in parabolični del roba posebej.

3. naloga

(25) Izračunaj integrala $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ in $\int_{\gamma_2} f(z)dz$, za

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 2z + 2)^2},$$

če sta $\gamma_1 = S(1, 2)$ in $\gamma_2 = S(-1, 2)$ pozitivno orientirani krožnici z radijem 2 in središčema 1 in -1 .

4. naloga

(a) (5) Naj bo $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n = \prod_{i=1}^n f_i$. Dokaži (lahko z indukcijo), da je

$$\frac{f'}{f} = \frac{f'_1}{f_1} + \dots + \frac{f'_n}{f_n}$$

(b) (10) Naj bo $f(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{k_j}$, kjer so k_j cela števila, a_j pa kompleksna števila. Naj bo $S(0, R)$ krožnica, ki obkroži točke $a_1, \dots, a_n$. Pokaži, da je integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(0, R)} \frac{f'(z)dz}{f(z)}$$

celo število. Uporabiš lahko točko (a), tudi če je ne znaš dokazati.

(c) (10) Izračunaj integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{S(0, 4)} \frac{f'(z)dz}{f(z)}$$

za $f(z) = (z^2 + 1)^2(z^2 - 1)^{-2}$.

3. 2. 2012

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

S pomočjo izreka o fiksno točki poišči vse realne rešitve enačbe

$$x^2 + \sin x = 2.$$

2. naloga

(a) Ali je vektorsko polje $\vec{F}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ potencialno? Če je, izračunaj njegov potencial. (b) Izračunaj integral $\int_c \vec{F} d\vec{s}$ po krivulji c , ki je dana s parametrizacijo

$$c(s) = e^{-x}(\cos(x), \sin(x), 1), \quad x \in [0, 2\pi].$$

Krivulja naj bo orientirana skladno s parametrizacijo.

3. naloga

1. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$. Izračunaj integral

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-(s+i\alpha)^2} ds.$$

2. Dokaži, da za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ velja

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} \cos(2\alpha s) ds = e^{-\alpha^2} \sqrt{\pi}.$$

4. naloga

Reši diferencialno enačbo $y'' - 2y + 10y = 6e^x \cos(3x)$ pri pogoju $y(0) = y'(0) = 0$.

12. 9. 2012

Čas pisanja je 90 minut. Možno je doseči 100 točk. Odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga

Naj bo $f(x) = \sqrt{x+20}$. Pokaži, da f slika interval $M = [0, 80]$ nase in da par (f, M) ustreza predpostavkam izreka o fiksni točki za običajno metriko na $\mathbb{R}$. Fiksno točko tudi izračunaj.

2. naloga

Naj bo dano vektorsko polje $\vec{R} = (z, -x, x)$ in ploskev

$$D = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y \geq 0\}$$

orientirana z zunanjo normalo. Določi orientacijo ∂D skladno z orientacijo D in izračunaj $\int_{\partial D} \vec{R} d\vec{s}$. Izračunaj še pretok vektorskega polja skozi D .

3. naloga

Izračunaj integral

$$\int_{\{|z|=1\}} \frac{\sin z^m}{z^n} dz$$

kjer je krožnica pozitivno orientirana, m in n pa celi števili.

4. naloga

Reši diferencialno enačbo

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x} \cos x$$

pri začetnem pogoju $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$.